Österreichische Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte

XIII. Österreichisches Symposion zur Geschichte der Mathematik

Namenspatrone und Taufpaten
Wie mathematische Begriffe zu ihrem Namen kamen

Namesaints and Godfathers — *How mathematical concepts are baptized*

Tagung, 1. bis 7. Mai 2016, Miesenbach (Niederösterreich)

Kurzfassungen der Vorträge

Herausgeber:
Dr. Christa Binder *e-mail:* christa.binder@tuwien.ac.at

Institut für Analyis und Scientific Computing
Technische Universität Wien

Danksagung:
Ohne die großzügige Hilfe der folgenden Institutionen
wäre die Durchführung der Tagung nicht möglich gewesen.
Dafür herzlichen Dank.

International Commission on the History of Mathematics (ICHM)
Amt der Niederösterreichischen Landesregierung, Abteilung Kultur und Wissenschaft
Österreichische Mathematische Gesellschaft
Institut für Analysis und Scientific Computing, TU Wien
anonyme Spender

Layout und Druckvorlage: Peter Schmitt

KULTUR NIEDERÖSTERREICH

Gefördert durch das Land Niederösterreich.

Inhaltsverzeichnis

Eine pdf-Version dieses Bandes (mit internen Links und mehr Farben) kann von www.mat.univie.ac.at/~schmitt/OeSGdM/ *bezogen werden*

Summenformeln für endliche arithmetische und geometrische Reihen in Handschriften und frühneuzeitlichen Rechenbüchern im Regensburger Raum

Alfred Holl

In diesem Beitrag werden nur einzelne Beispiele herausgegriffen, Vollständigkeit kann nicht angestrebt werden.

1. Endliche arithmetische Reihen[1]

Die Summenformel für eine endliche arithmetische Reihe ist wesentlich älter als die Version von Carl Friedrich Gauß (1777-1855), nach dem sie normalerweise benannt wird. Da die Formel relativ leicht abzuleiten ist (Summe aus erstem und letztem Glied = Summe aus zweitem und vorletztem = Summe aus drittem und drittletztem etc.), hat man sie im Laufe der Geschichte sicher mehrmals aufgestellt.[2] Der Regensburger Rechenmeister Johann Kandler (~1535-1600) nennt sie 1578 im ältesten gedruckten Regensburger Rechenbuch in verbaler Form: *Solche vnnd dergleichen Arithmetische Progressiones kurtz in ein summa zubringen/ addir die erst zal zur letzten/ was kombt/ multiplicir mit dem halben theil der stett/ erzeigt sich die summa*.[3]

Kandler bringt dazu eine Textaufgabe, mit Lösung, aber ohne Lösungsweg: die ‚Prüfeninger Eierwette'. Sie wird hier nicht nur wegen ihrer Originalität angeführt, sondern auch weil Kandlers Nachfolger Georg Wendler (1619-1688) dazu eine handschriftliche Lösung in überraschender Form präsentiert.[4]

Die Geschichte spielt auf einer Wiese zwischen Regensburg und Prüfening (Ort eines nicht nur mathematikhistorisch berühmten Benediktinerklosters). Dort sind in einer Linie 37 Eier hintereinander im konstanten Abstand von 12 Schuh ausgelegt. Davor steht – 12 Schuh vom ersten Ei entfernt – ein Sammelkorb. Zwei Leute wetten nun darum, welcher Weg der kürzere sei: nach Prüfening und zurück zu gehen oder die Eier stückweise aufzuheben und jedes für sich

---

[1] Vgl. für den ganzen Abschnitt Holl, Textaufgaben mit Bezug zu Regensburg, 2016, S. 353-356.

[2] So erscheint die Formel schon um 800 in der dem Alkuin zugeschriebenen lateinischen Aufgabensammlung *Propositiones ad acuendos iuvenes* (vgl. die Edition von Folkerts 1978, S. 70, Nr. 42, und die Erläuterungen auf S. 37f.). Im 15. Jh. tauchen arithmetische Reihen im *Algorismus Ratisbonensis* des Fridericus Amann im Kontext von Bewegungsaufgaben auf: *progressive vadere*, jeden Tag eine Meile mehr (Edition Vogel 1954, S. 43f., Nr. 53, 54, 55 (allgemeine verbalisierte Formel ohne spezielle Zahlenwerte), S 59f., Nr. 99).

[3] Kandler, *Arithmetica*, Ci'; ähnlich Wendler, *Arithmetica practica*, F1'.

[4] Wendler, *Kandlers «Arithmetica»*, 374v.

nacheinander in den Korb zu legen (Abb. 1). Der zweite Weg lässt sich durch Summation einer arithmetischen Folge (Progression), also durch eine endliche arithmetische Reihe, berechnen.[5]

Das zugrunde gelegte Längenmaß ist die deutsche Meile, definiert als die Länge von 4 Äquator-Bogenminuten, d.h. als der (360·15)-te Teil des äquatorialen Erdumfangs.

17 Item zwen zu Regenspurg/ wetten mit einander/ also/ der erst will auff eine wisen le= gen 37 Ayr/ je eins vom andern 12 schuch weit/ Die soll jme der ander holen/ der gestalt/ er woͤl le von dem ersten Ay 12 schuch zuruck setzen einen Korb/ darein soll er jhme die Ayer vnzer= brochen legen/ vnd soll vom korb an außgehen/ das erste Ay holen vnd in den korb legen/ Also das ander/ dritt/ viert/ etc. jedes mit einem son= dern außgang holen. So woͤlle er (wann der ander anfecht zu arbeiten) auch anfahen gen Prieuening zu gehen/ (ist ein Kloster bey Re= genspurg ¼ Meil dauon ligend) vnd wider an dieselbe stat kommen/ vnnd seinen gang ehe ver= richten/ dann der ander die Ayer auffgehoben/ die frag welches gang weiter gewesen? Facit der mit den Ayrn ist gangen ¾ teutscher meil 2 stadia/ 124 Passus/ 2 schuch/ hat dennoch seinen gang lengsamer verricht/ ein teutsche meil ge= rechnet per 32 stadia/ ein stadium per 125 passus/ ein passus per 5 schuch oder ein teutsche meil per 4000 passus/ ein passus per 5 schuch.

Abb. 1: ‚Prüfeninger Eierwette‘ (Kandler, *Arithmetica*, Xiii’-Xiv’, Nr. 17)

Nach Prüfening und zurück ist es 2 · ¼ = ½ deutsche Meile, die der erste Wettstreiter zurücklegen muss.

Der zweite Wettstreiter (der ‚Eiersammler‘) muss 37 Gänge ausführen, genauso viele, wie er Eier holt. Sein erster Gang ist hin und zurück 2·12 Schuh = 24 Schuh lang. Jeder Gang zu einem Ei und zurück ist 2·12 Schuh länger als der zum vorhergehenden. Der 37. Gang zum letzten Ei und zurück ist 37·2·12 Schuh = 888 Schuh lang.

[5] Vgl. Tropfke 1980, Abschnitt 4.2.4.1 „Arithmetische Reihen“, S. 625-628; dieser spezielle Aufgabentyp wird dort nicht genannt. Vgl. Wendler, *Neudörffers «Grosse Arithmetic»*, 130v (fast gleiche Zahlenwerte, spielt in Regensburg ohne Bezug zu Prüfening) und 136r (silberne Knöpfe statt Eier, ohne Bezug zu Regensburg).

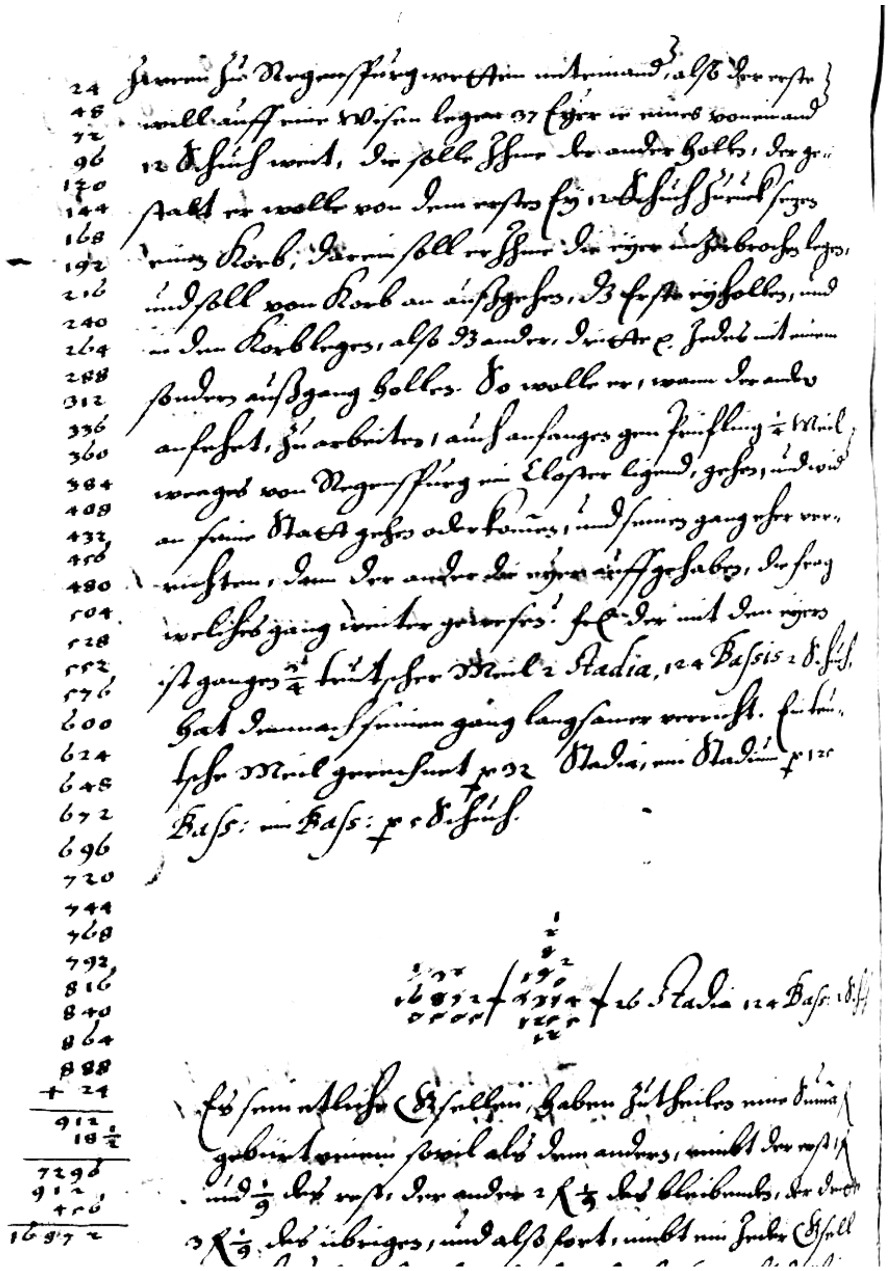


Abb. 2: Berechnung einer endlichen arithmetischen Reihe
(siehe Erläuterung im Text)
(Wendler, *Kandlers «Arithmetica»,* 374v)

Die Gänge zu den Eiern bilden eine arithmetische Folge mit erstem Element 24 und 37. Element 888. Ihre 37 Elemente schreibt Wendler in seiner Bearbeitung zunächst ohne ersichtlichen Grund explizit untereinander auf und addiert sie dann doch nach der Summenformel (Abb. 2).
Damit ergibt sich für den zweiten Weg:
(24 + 888) · 37/2 Schuh = 16872 Schuh
= ¾ deutsche Meile 2 Stadien 124 Passus 2 Schuh.[6]

[6] 1 deutsche Meile = 32 Stadien = 4000 Passus = 20000 Schuh.

Der erste Wettstreiter hat mit einer halben deutschen Meile den kürzeren Weg zurückzulegen und gewinnt damit die Wette.

2. Endliche geometrische Reihen[7]

Der Zusammenhang zwischen Multiplikation und Exponentenaddition, der bei geometrischen Reihen, Exponentialschreibweise und logarithmischem Rechnen eine wichtige Rolle spielt, wird schon früh deutlich. Das älteste mir bekannte Beispiel aus dem deutschsprachigen Raum stellt eine – auch wegen ihrer altertümlichen Ziffernformen[8] bemerkenswerte – Tabelle zur Multiplikation von Sexagesimalbrüchen dar. Sie findet sich in lateinischen Übertragungen des 12. Jh.s von al-Khwarizmis Einführung ins Quadrivium (*Liber ysagogarum*), u.a. im Clm 13021 (1163-1168) aus dem Kloster Prüfening. Beispiel und Erläuterung dazu lauten:

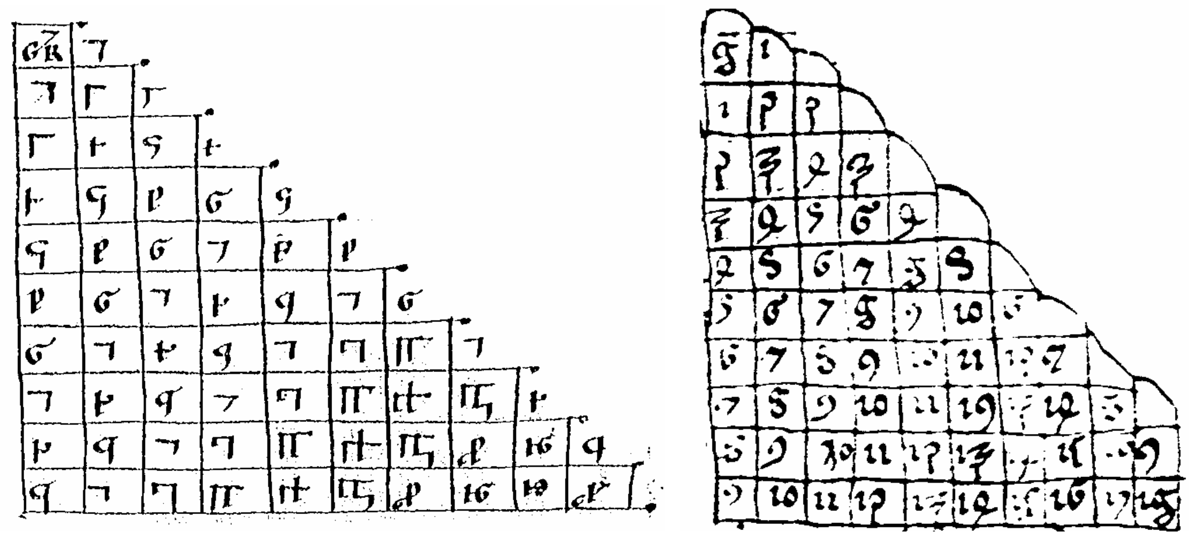


Abb. 3: Multiplikation von Sexagesimalbrüchen durch Addition der Exponenten, z.B. $(1/60)^2 \cdot (1/60)^3 = (1/60)^{2+3} = (1/60)^5$
(Clm 13021, 28ra; Cod. Paris. lat. 16208, 68ra)

12 minuta in 24 minuta ducta in 288 secunda decrescunt, et 14 minuta in 15 secunda 210 tertia fiunt […] *Harum minutiarum in se uel inter se collectarum summa sumit earundem minutiarum aggregatas denominationes.* ($12/60 \cdot 24/60 = 288/60^2$; $14/60 \cdot 15/60^2 = 210/60^3$. Das Ergebnis dieser mit sich selbst oder mit einander multiplizierten Brüche nimmt [als Benennung] ihre addierten Benennungen [„Exponenten“] an.)[9]

[7] Vgl. für den ganzen Abschnitt Holl, Mathematisch äquivalente Textaufgaben, 2016, S. 359-363.

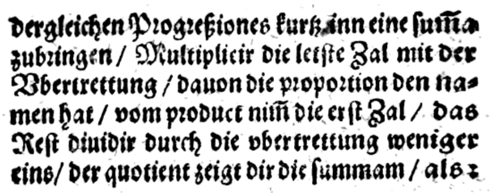
[8] Zur Variationsbreite indisch-arabischer Ziffernformen im Mittelalter vgl. Burnett 2010. Die Schreibweise für *12* findet sich in Cappelli 1979, S. 422.

[9] Zu Edition, Übersetzung und Parallelen vgl. Allard 1992, S. 39 und 237.

In seiner *Arithmetica* nennt Johann Kandler bereits 1578 die heute gebräuchliche Summenformel[10] sowie Ansätze zum Rechnen mit Exponenten. Die Formel für eine endliche geometrische Reihe, d.h. für die Partialsumme der Glieder einer geometrischen Folge (*Progreßion*), lautet:

$$aq^0 + \ldots + aq^n = a(q^{n+1} - 1)/(q - 1) = (aq^{n+1} - a)/(q - 1)$$

Kandler verwendet sie in der Form mit ausmultipliziertem a und beschreibt sie – ganz exakt – verbal, da es im 16. Jh. noch keine Exponentialdarstellung und kaum Buchstabenrechnen gibt; der Quotient der geometrischen Folge heißt bei ihm Übertretung (*Vbertrettung*) – ebenso wie die Differenz der arithmetischen (Abb. 4).



dergleichen Progreßiones kurtz inn eine summa zubringen/ Multiplicir die letste Zal mit der Vbertrettung/ dauon die proportion den na= men hat/ vom product nimm die erst Zal/ das Rest diuidir durch die vbertrettung weniger eins/ der quotient zeigt dir die summam […]

Abb. 4: Kandlers Berechnung der endlichen geometrischen Reihe (Kandler, *Arithmetica*, Cii')

Besonders spannend ist Kandlers implizites Rechnen mit Exponenten. Er weist dem ersten Folgenglied ($aq^0 = a$) die *vbergeschribene Zahl* – in heutiger Sprache den Index – 0 zu, dem zweiten (aq^1) den Index 1 und damit allgemein dem n-ten Folgenglied den Index n. Der Index entspricht also genau dem Exponenten des jeweiligen Folgenglieds. Damit hat Kandler eine Möglichkeit, den Index des Produktes von Folgengliedern zu bestimmen. Multipliziert man nämlich das n-te und das m-te Folgenglied und dividiert durch das erste, so erhält man $aq^n \cdot aq^m / a = aq^{n+m}$, das $n+m$-te Folgenglied. Multiplikation entspricht Exponentenaddition. Das führt Kandler am Beispiel einer Dreierprogression aus, d.h. der Quotient der geometrischen Folge ist 3 (Abb. 5).[11]

Für einen sich mit Mathematik beschäftigenden Menschen mögen diese Regeln auf der Hand liegen.[12] Trotzdem ist es faszinierend, sie in dieser Präzision und Allgemeinheit in einem Druck des 16. Jh.s zu lesen. Für das Alltagsdenken hingegen ist das exponentielle Anwachsen einer endlichen geometrischen Reihe verblüffend und hat daher schon Mathematiker im Orient

[10] Kandler, *Arithmetica*, Cii'; ähnlich Wendler, *Arithmetica practica*, F3.

[11] Kandler, *Arithmetica*, Ciii'-iv.

[12] Geometrische Reihen erscheinen auch in den *Propositiones ad acuendos iuvenes*; die Lösung erfolgt durch Aufzählung der Zwischenergebnisse ohne allgemeine Formel (vgl. die Edition von Folkerts 1978, S. 51f., Nr. 13, S. 69, Nr. 41 und die Erläuterungen auf S. 37).

zu Geschichten inspiriert, bei denen die Vermutung, dass durch mehrfache Verdoppelung eines minimalen Betrags ein relativ geringer Preis entstünde, in die Irre führt.[13]

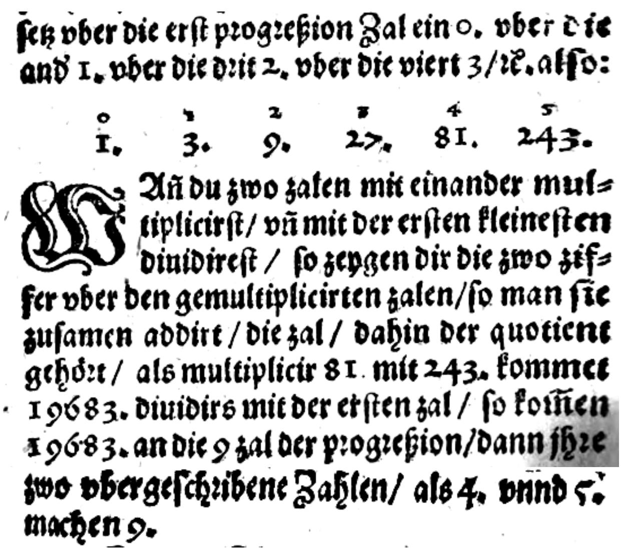


Abb. 5: Kandlers ‚Exponentialrechnung':
setz vber die erst progreßion Zal ein 0. vber die ander 1. vber die drit 2. vber die viert 3/ etc. also:

0 1 2 3 4 5

1. 3. 9. 27. 81. 243.

WAnn du zwo zalen mit einander mul= tiplicirst/ vnd mit der ersten kleinesten diuidirest/ so zeygen dir die zwo zif= fer vber den gemultiplicirten zalen/ so man sie zusamen addirt/ die zal/ dahin der quotient gehort/ als multiplicir 81 mit 243. kommet 19683. diuidirs mit der ersten zal/ so kommen 19683. an die 9 zal der progreßion/ dann jhre zwo vbergeschribene Zahlen/ als 4. vnnd 5. machen 9.

(Kandler, *Arithmetica*, Ciii'-iv)

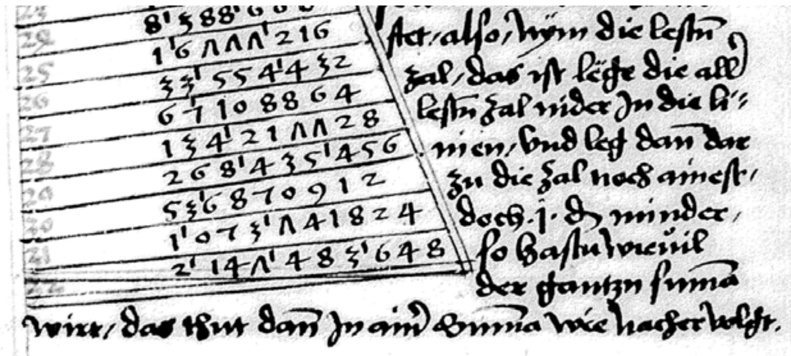
Die bekannte Version der ‚Schachbrettaufgabe' erscheint auch im *Algorismus Ratisbonensis*.[14] Ohne Angaben zur Berechnung, wie schon beim ersten

[13] Vgl. Tropfke 1980, Abschnitt 4.2.4.2.2 „Die Schachbrettaufgabe (Zweier-progression)", S. 630-633. So findet sich die Formel schon um 800 in der dem Alkuin zugeschriebenen lateinischen Aufgabensammlung *Propositiones ad acuendos iuvenes* (vgl. die Edition von Folkerts 1978, S. 70, Nr. 42, und die Erläuterungen auf S. 37f.).

[14] Amann, *Alg. Rat.*, Edition Vogel 1954, S. 141, Nr. 319; Curtze 1894, S. 398.

Beispiel, illustriert der *Algorismus Ratisbonensis* die Zweierprogression mit zwei weiteren. Eine Kuh wird nach ihren Klauen verkauft, sie hat an jedem Bein vier, also 16, die erste kostet einen Heller etc.[15] Ein Pferd wird nach seinen Hufnägeln verkauft, es hat an jedem Huf acht, also 32, der erste kostet wiederum einen Heller.[16]

Das Pferdebeispiel ist insofern interessant, als es mit den gleichen Zahlenwerten um 1480, etwa 30 Jahre nach dem *Algorismus Ratisbonensis* und etwa 100 vor Kandlers Rechenbuch, in der Handschrift des *Tegernseer Linienrechenbuchs* (Cgm 740) auftaucht und dort mit der speziellen Summenformel für die Zweierprogression beginnend mit 1 berechnet wird: $2^0 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1 = 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1$ (Abb. 6). Allerdings ist die Formulierung, die den letzten Ausdruck wiedergibt, noch ziemlich ungelenk.[17]



[…] *also/ Nym die lesten*
zal/ das ist lëge die aller
lesten zal nider in die li=
nien/ vnd leg dann dar
zu die zal noch ainest/
doch .1. ϑ minder/
so hastu wieuil
der gantzn summa
wirt/ das thut dann In ainer Summa wie nacher volgt.

Abb. 6: Geometrische Zweierprogression im *Tegernseer Linienrechenbuch*:
In der Tabelle links steigend die Zweierpotenzen,
bei Nr. 25 etwa steht $16777216 = 2^{24}$.
(Cgm 740, 33v; Transkription nach Kaunzner 1970, S. 16)

Literaturverzeichnis

1. Quellen

Allard, André: Le calcul indien: Algorismus. Histoire des textes, éd. crit., trad. et comm. des plus anciennes versions latines du 12e siècle issues de l’arithmétique d’al-Khwârizmî. Paris 1992.

Amann, Fridericus: *Algorismus Ratisbonensis. Practica*. Edition in: Vogel, Kurt: Die *Practica* des *Algorismus Ratisbonensis*. Ein Rechenbuch des Benediktinerklosters St. Emmeram aus der Mitte des 15. Jahrhunderts nach den Handschriften der Münchner Staatsbibliothek und der Stiftsbibliothek St. Florian. München 1954 (= Schriftenreihe zur bayerischen Landesgeschichte 50).

[15] Amann, *Alg. Rat.*, Edition Vogel 1954, S. 140, Nr. 317; Curtze 1894, S. 398.
[16] Amann, *Alg. Rat.*, Edition Vogel 1954, S. 140, Nr. 318, und S. 125, Nr. 274; Curtze 1894, S. 398; ähnlich Wendler, *Neudörffers «Grosse Arithmetic»*, 193v (gereimt).
[17] *Tegernseer Linienrechenbuch*, Cgm 740, 33v-34r; vgl. Kaunzner 1970, S. 15f.

Curtze, Maximilian: Mathematisch-Geschichtliches aus dem Clm 14908. In: Archiv der Mathematik und Physik 13 (1894), S. 388-406.

Kandler, Johann: *Arithmetica*. Regensburg: Johann Burger 1. Aufl. 1578 (ÖNB Wien 72.M.14); Lauingen: Jacob Winter 3. Aufl. 1605 (BSB München Math.p. 248).

Propositiones ad acuendos iuvenes. Edition in: Folkerts, Menso: Die älteste mathematische Aufgabensammlung in lateinischer Sprache: Die Alkuin zugeschriebenen *Propositiones ad acuendos iuvenes*. Überlieferung, Inhalt, kritische Edition. Wien 1978 (= Österr. Akademie der Wiss., Math.-naturwiss. Klasse, Denkschriften, 116. Band, 6. Abhandlung).

Tegernseer Linienrechenbuch. Tegernsee ~1480 (Cgm 740). Edition in: Kaunzner, Wolfgang: Über die Handschrift Cgm 740 der Bayer. Staatsbibliothek München. München 1970 (= Veröffentlichungen des Forschungsinstituts des Deutschen Museums für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik. Reihe C, Nr. 11).

Wendler, Georg: *Analysis vel resolutio*. [Nürnberg, Regensburg ~1645-~1663] (Cgm 3789).

Wendler, Georg: *Arithmetica practica*. Regensburg: Christoph Fischer 1667.

Wendler, Georg: *Kandlers «Arithmetica»* [Bearbeitung von Aufgaben]. *Corolarium Zugab und Bschluß Exempla Herrn Johann Kandlers gewesten Rechenmeisters in Regenspurg* und *Herrn Johann Kandlers Falsi durch Coss auffgelöst*. In: Wendler, Georg: *Analysis vel resolutio*, 368r-376r und 376v-382r.

Wendler, Georg: *Neudörffers «Grosse Arithmetic»* [Bearbeitung von Aufgaben]. *Herrn Anthonij Neudörffers Modist Schreib: und Rechenmeister Inspector Examinator Visitator der Teutschen Schreib: und Rechen Schulen in Nürnberg* […] *absonderlicher auffgaben und kunst Exempla seiner grossen Arithmetic, Dergleichen niemals gesehen auch in druck nicht kommen sind*. In: Wendler, Georg: *Analysis vel resolutio*, 120v-215r, Titel 1r.

2. Sekundärliteratur

Burnett, Charles: Indian numerals in the Mediterranian Basin in the twelfth century with special reference to the 'Eastern forms'. In: Burnett, Charles: Numerals and Arithmetic in the Middle Ages. Farnham 2010 (= Variorum Collected Studies Series 967), V S. 237-288.

Cappelli, Adriano: Dizionario di abbreviature latine ed italiane. Mailand ^{6}1979.

Holl, Alfred: Mathematisch äquivalente Textaufgaben in unterschiedlichen Gewändern. In: Feistner, Edith; Holl, Alfred: Erzählen und Rechnen. Interdisziplinäre Blicke auf Regensburger Rechenbücher. Münster 2016, S. 357-374.

Holl, Alfred: Textaufgaben mit Bezug zu Regensburg. In: Feistner, Edith; Holl, Alfred: Erzählen und Rechnen. Interdisziplinäre Blicke auf Regensburger Rechenbücher. Münster 2016, S. 335-356.

Tropfke, Johannes: Geschichte der Elementarmathematik. Bd. 1: Arithmetik und Algebra. 4. Aufl. Vollständig neu bearbeitet von Kurt Vogel, Karin Reich und Helmut Gericke. Berlin, New York 1980.