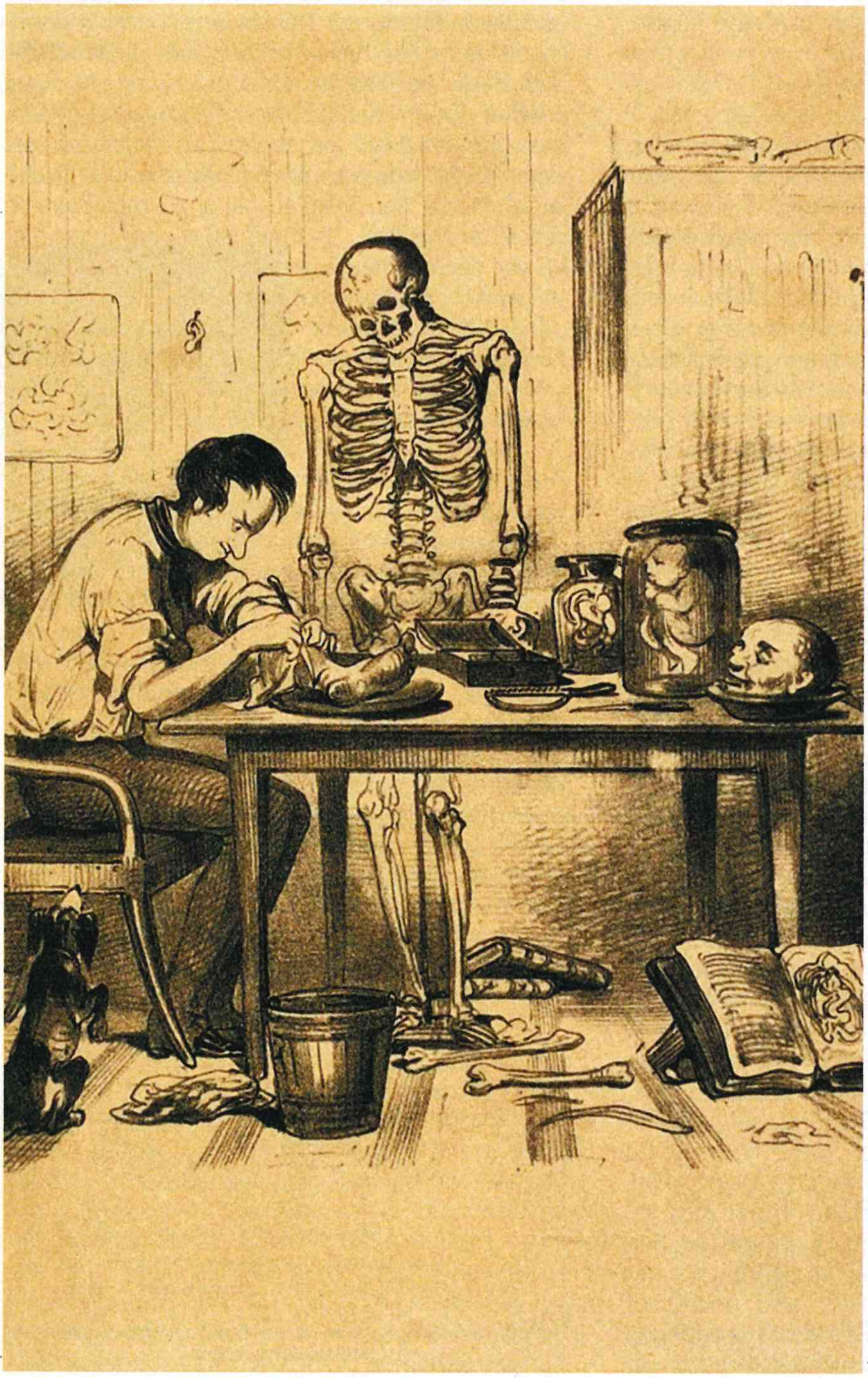
März/April 2017
Jahrgang 66 Nr. 3/4

UNSER BAYERN

BSZ | Bayerische Staatszeitung
und Bayerischer Staatsanzeiger



Kniffliges aus Rechenbüchern

Mehr als ein Kapitel der Mathematikgeschichte: Was Textaufgaben der frühen Neuzeit über Alltägliches verraten

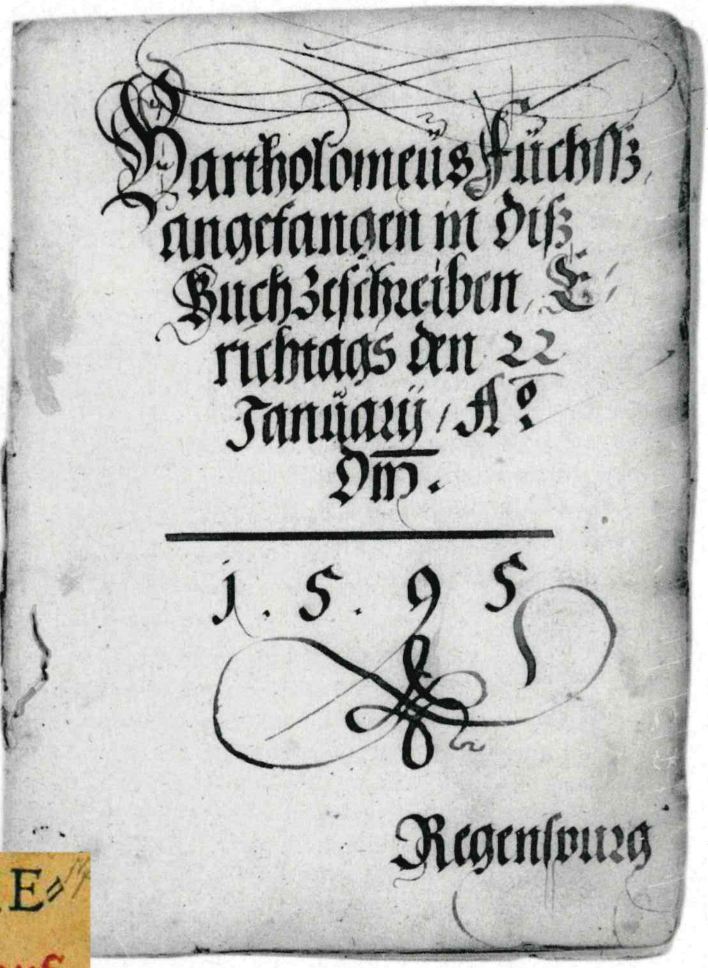
In Zeiten einer Hochkonjunktur der MINT-Fächer ist es kaum vorstellbar, dass Mathematik lange Zeit gar kein normales Schulfach war und auch kein Bestandteil des Abiturs. Umso mehr lohnt sich ein Blick in die Geschichte der Mathematisierung der Gesellschaft, die sich am Übergang vom Spätmittelalter zur frühen Neuzeit in Gestalt der Rechenkunst (ars arithmetica) Bahn bricht: Parallel zur Etablierung der Stadtkultur mit Handel, Gewerbe und Verwaltung kommt es zu einer sich von Spanien, Italien und Byzanz aus über ganz Europa erstreckenden Verbreitung der Kulturtechnik des Rechnens.

Die Vermittlung dieser Kulturtechnik lag in den Händen von Rechenmeistern, die in Städten eigene Rechenschulen betrieben. Rechenmeister mussten das Bürgerrecht haben, um die Eröffnung einer Schule beantragen zu können, und sie mussten verheiratet sein, um ein der Schule angegliedertes „Internat" zu führen. Sie waren wichtige Mittler für die schulische und universitäre Verankerung der Mathematik. Aus akademischer Sicht galten sie freilich zunächst als Handwerker, die bloß anwendungsorientiertes „Kaufmannswissen" weitergaben und daneben oft genug die Aufgabe einfacher „Schulhalter" übernahmen. Sie absolvierten ihre Ausbildung bei einem Meister in Form einer Lehre, obwohl ein zunehmender Anteil unter ihnen bereits eine höhere Schulbildung mitbrachte und über den Horizont der Kaufmannsmathematik hinauszusehen in der Lage war. Nicht zufällig dokumentiert sich ein durchaus elitäres Corporate-Identity-Bewusstsein unter Rechenmeistern und ihren Familien: Man kannte einander (auch über Stadtgrenzen hinweg) und knüpfte „dynastische" Bande.

Die von besonders kompetenten, ambitionierten Rechenmeistern verfassten Rechenbücher waren als Drucke ein verbreiteter Bestandteil der Unterrichtspraxis. Sie wandten sich an Lernende unterschiedlichen Alters, auch an Erwachsene, die sich im Selbststudium beruflich weiterbildeten. Als didaktisches Mittel der Wahl dominieren neben reinen Umrechnungsaufgaben vor allem Textaufgaben, die Fallgeschichten erzählen. So ließ sich anschaulich durchexerzieren, wo, wann und wozu man zu rechnen hat, bevor der mit *Ist die Frag* eingeleitete Anschluss der Rechenaufgabe an die Erzählung hergestellt wird und die Angabe des richtigen Ergebnisses, das *Facit*, folgt.

Das Erzählen war aber auch der Schlüssel zum Tor, das aus der „Kaufmannsmathematik" he-

Der Schulmeister: Illustration aus Christoff Weigels „Abbildung der Gemein-Nützlichen Haupt-Stände", Regensburg 1698. *Foto: SLUB Dresden, Technol.A.142* rausführt: Der erfahrene Aufgabensteller wusste, dass Fallgeschichten als „Übersetzungen“ mathematisch-formaler Rechenaufgaben in raumzeitliche Wirklichkeit(en) mitnichten an alltagspraktische Konstellationen gebunden waren. Gerade im 17. Jahrhundert, als die in Deutschland mit dem 15. Jahrhundert beginnende Geschichte der Rechenbuchdrucke ihren Höhepunkt erreichte, begegnen hier immer wieder Fallgeschichten, die weit über die Welt von Handel und Gewerbe hinausgehen, die verschiedensten Lebens- und Wissensbereiche umfassen, ja überhaupt nur mathematisch denkbar sind. Am Beispiel von Regensburger Rechenbüchern ist ein interdisziplinäres Kooperationsprojekt zwischen der Universität Regensburg und der TH Nürnberg auf Spurensuche in die Geschichte gegangen.



Johann Kandlers Lehrbuch „Arithmetika“ von 1578. Darunter die Rechenhandschrift (1595) von Bartholomäus Fuchs.

Fotos: ÖNB Wien, 72.M.14, BSB München, Cgm 4143

Die Geschichte der Regensburger Textaufgaben beginnt mit dem Benediktiner Fridericus Amann (um 1405 bis 1465) aus dem Kloster St. Emmeram. Mit seinem Namen eng verbunden ist eine um 1450 handschriftlich überlieferte Sammlung von 354 Textaufgaben in deutscher und lateinischer Sprache, die *Practica* des *Algorismus Ratisbonensis*. (Einen Algorismus nannte man im Mittelalter eine Anleitung zum Rechnen mit indisch-arabischen Zahlen; die Bezeichnung ist der latinisierte Name des persischen Gelehrten Mohammed ben Musa al-Khwarizmi (um 780 bis um 850), auf den auch der heutige Ausdruck Algorithmus für eine automatisierbare Verarbeitungsvorschrift zurückgeht.)

Diese Sammlung übte enormen Einfluss auf die ersten gedruckten Rechenbücher aus, die andernorts nach den ersten Anfängen um 1475 ab 1525 regelrecht aus dem Boden schossen. Am berühmtesten sind wohl die Werke des in Annaberg/Erzgebirge tätigen Adam Ries (1492 bis 1559), auf den der Spruch „Das macht nach Adam Ries“ zurückgeht.

Regensburg jedoch erlebte nach Fridericus Amann mathematisch ruhige 100 Jahre. Der als Astronom und Kartograf bekannte Peter Bienewitz (1495/1501 bis 1552), latinisiert zu Apian, hatte zwischen 1521 und 1526, zwischen Studium in Wien und Berufung auf einen Mathematiklehrstuhl an der 1572 gegründeten bayerischen Landesuniversität in Ingolstadt, flüchtigen Kontakt zu Regensburg. In einer beruflich eher ungewöhnlichen Kombination war er zugleich Universitätsmathematiker und Rechenbuchautor (*Eyn newe vnnd wolgegründte underweysung aller Kauffmannß Rechnung*, Ingolstadt 1527). Unter seinem Einfluss entstand 1524 eine – 2013 entdeckte – Handschrift (Herzogliches Georgianum München, 4° Ms 50), die explizite Bezüge zu Regensburg enthält. Ansonsten gab es zu dieser Zeit in Regensburg keine Autoren von Rechenbüchern.

Das erste gedruckte Regensburger Rechenbuch, die *Arithmetica* des möglicherweise in Amberg ausgebildeten Johann Kandler (um 1530 bis 1600) aus Böhmisch Budweis, datiert erst 1578. Es wurde 1608 zum dritten Mal aufgelegt. Dazu sind zwei bisher unbeachtete Rechenhandschrif-

Rechnen Sie mit!

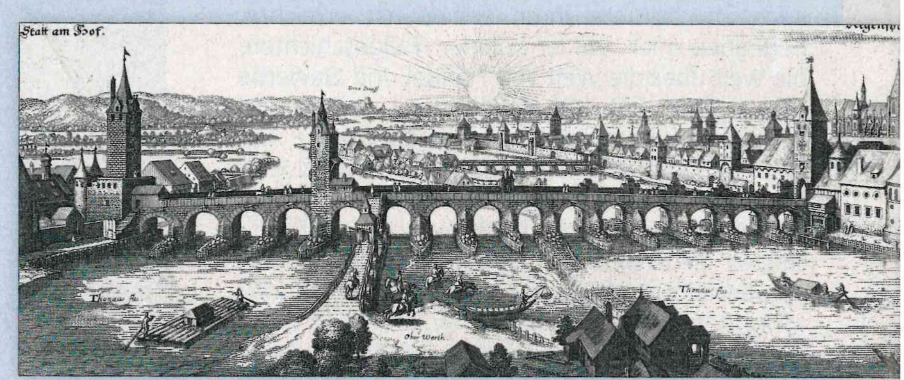
Beispielhafte Textaufgaben aus Regensburger Rechenbüchern

Kaufmannswesen:

Preis einer Schifffahrt

Bei einer Reise von Regensburg nach Wien mieten mehrere Personen gemeinsam ein Schiff. Die ersten Reisenden, fünf Regensburger Bürger, treffen gleich zu Anfang mit dem Schiffseigner eine Absprache, wie sich der Fahrpreis pro Person verringern soll, wenn später noch mehr Fahrgäste mitfahren wollten.

Der Beitrag von vier hinzukommenden Nürnberger Kaufleuten wird demgemäß je zur Hälfte auf die ursprünglichen Reisenden, die jetzt weniger zahlen müssen, und den Schiffseigner verteilt, so dass alle Reisenden den gleichen Fahrpreis bezahlen.



Geschäftiger Schiffsverkehr in Regensburg. Foto: BSB Bildarchiv

Da der Schiffseigner von dem Betrag, den jeder der vier Nürnberger beisteuert, nur die Hälfte bekommt, muss er umsonst 4/2 = 2 Personen zusätzlich für die ursprünglich angesetzten 16 Gulden (fl) transportieren, insgesamt also 7. Diese Tatsache bestimmt den neuen Fahrpreis pro Person: 16/7 fl = 2 fl 2 ß mit der Umrechnung 16 Gulden (fl) = 7 Schilling (ß). Insgesamt nimmt der „Schiffman" aber 9 Personen mit, so dass er 18 fl 18 ß = 20 fl 4 ß erhält.

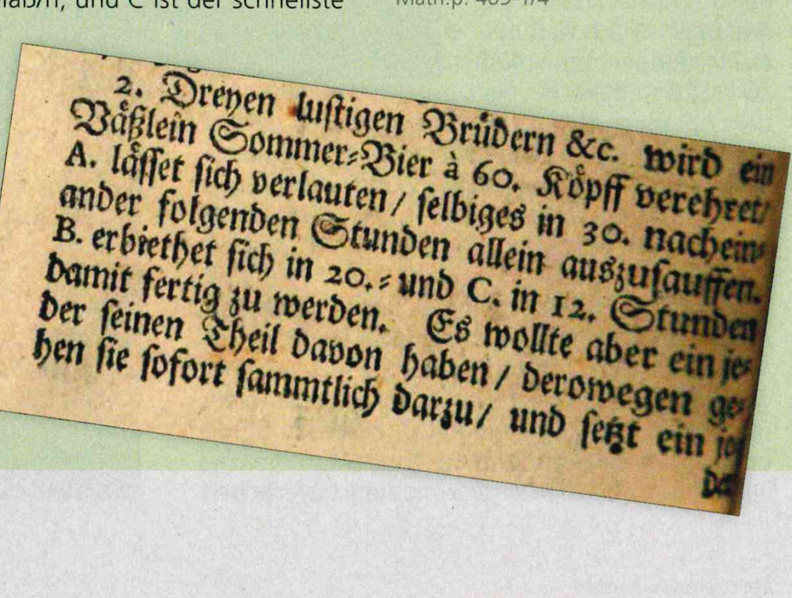
Aus: Kandler, Arithmetica, Bayerische Staatsbibliothek, München, Math.p.248

Sozialgeschichte: Wer schafft die meisten Maß Bier?

Paritius lässt drei lustige Brüder um die Wette trinken, allerdings beginnen sie gemeinsam, weil nur eine begrenzte Menge, ein „Väßlein Sommer-Bier à 60 Köpff", zur Verfügung steht. Kopf ist übrigens die damals gängige Bezeichnung für die Maß. A würde das ganze Fass in 30 Stunden schaffen, B in 20 und C in 12.

A ist der langsamste mit einer Trinkgeschwindigkeit von 2 Maß/h, B hält die Mitte mit 3 Maß/h, und C ist der schnellste mit 5 Maß/h. Aufaddiert ergeben sich 10 Maß/h, so dass das Fässlein in 6 Stunden leer wird und A 12, B 18, C 30 Maß bekommt.

Aus: Paritius, Neugemehrte Praxis Aritmetices, Bayerische Staatsbibliothek, Math.p. 409-1/4



2. Dreyen lustigen Brüdern &c. wird ein
Väßlein Sommer-Bier à 60. Köpff verehret/
A. lässet sich verlauten / selbiges in 30. nachein-
ander folgenden Stunden allein auszusauffen.
B. erbiethet sich in 20. = und C. in 12. Stunden
damit fertig zu werden. Es wollte aber ein je-
der seinen Theil davon haben / derowegen ge-
hen sie sofort sammtlich darzu / und setzt ein je-
De

Foto: BSB Bildarchiv

Literatur: Zum Tête-à-Tête an den Brunnen

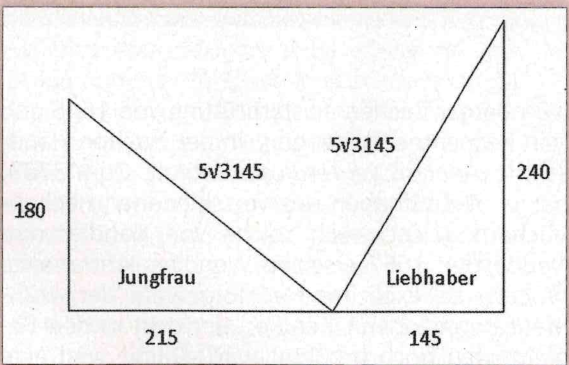
Auf die Verbindungslinie zweier verschieden hoher italienischer Palazzi legt Neudörffer ein liebliches Quellbrünnlein, an dem sich nächtens zwei Verliebte aus den beiden Palatia treffen. Im gespielten Streit ob der zurückzulegenden unterschiedlichen Fußwege stellen sie fest, dass sie als Vögelein von ihren Zinnen aus zum Brunnen gleich weit zu fliegen hätten.

Zur Lösung wird hier die etwas merkwürdige – aber von Neudörffer offensichtlich intendierte – Gleichsetzung der Maße schuch und Schritt in Wendlers Bearbeitung (Cgm 3789, 102rv) herangezogen (normalerweise gilt ein Schritt mit etwa 70 cm als ungefähr doppelt so lang wie ein Schuh oder Fuß). Die „Jungfraw“ J habe x Schritte zum Quellbrünnlein zu gehen, der Liebhaber L (x – 70) Schritte. Ihre Zinnen sind (x – 70 + 35) hoch, seine (x – 70 + 35) · (4/3). Die Hypotenusen (‚Flugstrecken') der so entstehenden rechtwinkligen Dreiecke müssen gleich lang sein, also nach dem Satz von Pythagoras:

$$\text{Wegstrecke}_J^2 + \text{Zinnenhöhe}_J^2 = \text{Wegstrecke}_L^2 + \text{Zinnenhöhe}_L^2,$$
$$x^2 + (x - 35)^2 = (x - 70)^2 + (x - 35)^2\,(4/3)^2,$$
$$x^2 - 250x + 7525 = 0.$$

Die positive Lösung dieser quadratischen Gleichung liefert die Wegstrecke der Jungfraw mit x = 215 Schritt; die negative Lösung (–35) ist irrelevant. Die restlichen Größen sind damit leicht zu berechnen.

(Neudörffer, Anweisung in die Arithmetic, S. 213, Nr. 68)



Geometrie zu Neudörffers Liebespaar am Quellbrünnlein.
Grafik: Alfred Holl

Foto: Getty

In Italia einer Villa hab ich mei=
ner Zeit gesehen 2 schöner Palatia/ die stunden
gerad gegen einander über/ dazwischen war auff
der Erden ein liebliches Quellbrünnlein/ wel=
ches zwey Liebe offtermals nächtlicher weile be=
suchten/ vnnd sich darzu funden. Auff eine zeit
thete sich die Jungfraw gegen jhrem Liebhaber
schertzweise beschweren/ obwoln jhre Zinnen deß
Pallasts nur ¾ so hoch als die seine/ müste sie doch
70 Schritt jhme zu gefallen von Hauß auß meh=
rers thun/ als Er/ biß sie zum Brünnlein käme/
der gibt darauff diese Antwort/ es were jhm zwar
leid/ doch ob er wol 35 Schritt weniger zum
Brunnen habe/ als jhre Zinnen schuch von der
Erden/ dünck jhne doch die Zeit gar kurtz seyn/
biß er von seiner hohen Zinnen herab käme.
Wünschte aber/ daß sie beyde Vögelein weren/
so hette eins so weit als das ander von jedes Zin=
nen gerad zum LiebBrunnen zu fliegen. Ist die
frag/ wie hoch jedes Zinnen schuch/ vnnd jedwe=
ders Schritt zum Brünnlein?

Foto: dpa

Fiktion:

Raub der Ameiseneier

Ans Ende dieser Auswahl sei ohne Lösung eine schwierige Variante eines Aufgabentyps gestellt, der singulär bei Anton Neudörffer auftritt. Sie soll zum Nachdenken anregen, den Blick auf Buch und Onlineausstellung lenken (*siehe Hinweise am Artikelende*) und zeigen, welch komplexe Sachverhalte mit trickreicher Anwendung von Mittelstufenmathematik gelöst werden können.

Neudörffer, der offenbar schon ein Gefühl für mathematische Ästhetik besaß, kommentiert am Ende: „wer aber den rechten vortheil nicht gebrauchet / dem werdens mühe machen / wie schön die solutio auch ist.“

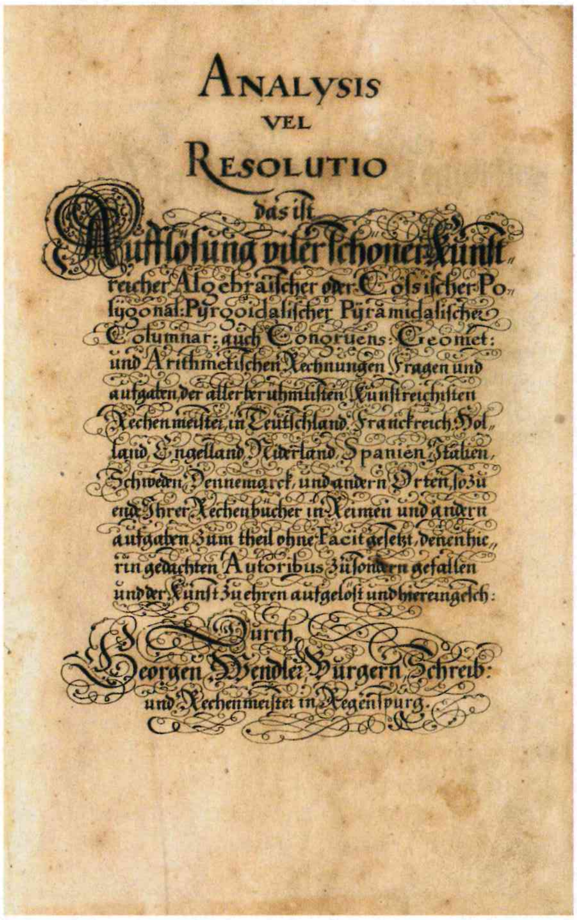
Die Situation: Es geht um 11 Ameisenhaufen, die verschieden viele Ameiseneier beherbergen. Die Ameisen aus Haufen 1 bis 10 plündern nun Haufen 11 und holen sich daraus je so viele Eier, wie sie schon vorher hatten. Dann fallen die Ameisen aus Haufen 1 bis 9 und 11 über den Haufen 10 und rauben wieder so viele Eier, dass sich ihr jeweiliger aktueller Bestand verdoppelt. Das Verfahren setzt sich in gleicher Weise über die Haufen 9 bis 1 fort.

Am Ende habe jeder der 11 Ameisenhaufen die gleiche Menge Eier, und es fragt sich, wie viele jeder am Anfang besaß. Jedes ganzzahlige Vielfache einer Lösung ist natürlich wieder eine Lösung, so dass Neudörffer nur die kleinste („PrimZahl“) sucht.

Neudörffer, Anweisung in die Arithmetic, S. 187, Nr. 186).

Titel von Georg Wendlers Handschrift „Analysis vel Resolutio". Auf 1400 großformatigen und farbig illustrierten Seiten löst Wendler über 1100 Aufgaben von fast 40 Rechenmeistern. Die Handschrift stammt aus der Zeit um 1650. Das Porträt zeigt ihn in seinem 20. Amtsjahr. Es ist abgedruckt in dem Buch Arithmetica practica (1667).

Fotos: BSB München, Cgm 3789, Staatl. Bibliothek Regensburg, Philos. 1334



Analysis
vel
Resolutio
das ist
Aufflösung vieler schöner Kunst-
reicher Algebraischer oder Cossischer Po-
lygonal: Pyrgoidalischer Pyramidalischer
Columnar: auch Congruens: Geomet:
und Arithmetischen Rechnungen Fragen und
aufgaben der allerberühmtisten Kunstreichisten
Rechenmeister in Teutschland Franckreich Hol-
land Engelland Niderland Spanien Italien
Schweden Dennemarck und andern Orten so zu
eins Ihrer Rechenbücher in Reimen und andern
aufgaben zum theil ohne Facit gesetzt, denen hie-
rin gedachten Autoribus zu sondern gefallen
und der Kunst zu ehren aufgelöst und hiereingeschr:
Durch
Georgen Wendler Burgern Schreib:
und Rechenmeister in Regenspurg.

ten aus den 1590er-Jahren erhalten (Bayerische Staatsbibliothek München, Cgm 4143 und Cgm 4144), die zweifellos eine unterrichtspraktische Verwendung dieses Buchs bezeugen. Der Rechenschüler, der sie schrieb, heißt Bartholomäus Fuchs (1578 bis 1653). Er arbeitete später unter anderem als Substitut des Regensburger Stadtschreibers.

1609 kam der aus einer traditionsreichen Nürnberger Dynastie stammende Anton Neudörffer (1571 bis 1628) nach Regensburg. Er veröffentlichte die Neuauflagen seines Rechenbuchs *Anweisung in die Arithmetic* weiterhin in Nürnberg. Der einzige Regensburger Rechenmeister, der ihn würdigte, war Georg Wendler. In einer handschriftlichen Bearbeitung von Aufgaben aus verschiedenen Rechenbüchern widmete er ihm gleich zu Anfang 215 Blatt. Darunter finden sich – 2014 neu entdeckt – Teile von Neudörffers angekündigter, aber nie gedruckter *Grosser Arithmetic*.

Ab 1631 wurde Georg Wendler (1619 bis 1688) auf Kosten der Stadt Regensburg in Nürnberg ausgebildet. Seit 1647 arbeitete er in Regensburg. Die Bayerische Staatsbibliothek München besitzt zwei hervorragende illustrierte Handschriften aus der Mitte des 17. Jahrhunderts, in denen er seinen mathematischen Interessen frönt. Die erste (Cgm 3788) enthält auch die Aufgaben seiner Nürnberger Rechenmeisterprüfung von 1646 und sein Rechenmeisterzeugnis. In der zweiten Handschrift (*Analysis vel resolutio* betitelt, Cgm 3789) hat er Textaufgaben aus verschiedenen Rechenbüchern gelöst, auch solche von Kandler und Neudörffer. 1667 erschien Wendlers *Arithmetica practica* als explizites Nachfolgewerk der *Arithmetica* von Johann Kandler, der dort in den Begleittexten hoch gerühmt wird. Damit wird eine eigenständige Regensburger Rechenbuch- und Rechenmeister-Tradition mit einem markanten Corporate-Identity-Bewusstsein begründet, die Georg Heinrich Paritius (1675 bis 1725) fortsetzt.

Paritius, dessen Ausbildungsgang unbekannt ist, veröffentlichte 1706 sein erstes Rechenbuch, die *Praxis Arithmetices*. Danach folgten zahlreiche kaufmannsmathematische Werke für unterschiedliche Zielgruppen. Über seinen Lehrberuf hinaus war es Paritius wichtig, einem zeitgenössischen Rechenmeisternetzwerk mit höheren Ansprüchen anzugehören, nämlich der 1690 gegründeten Kunst-Rechnungs-liebenden Societät, der heutigen „Mathematischen Gesellschaft in Hamburg". Ein Kuriosum seines Lebens sind die 1718 aktenkundig gewordenen Auseinandersetzungen mit seiner zweiten Frau (Stadtarchiv Regensburg), die seinen Ruf wohl so schädigten, dass er um 1720 begann, (als alternative Ein-

Porträt des 33-jährigen Georgius Henricus Paricius in seinem Werk „Compendium Praxis Arithmetices", Regensburg 1708.

Foto: BSB, Math.p.404

nahmequelle) heute historisch wertvolle lokalgeschichtliche Werke zu erstellen.

Mathematik ist abstrakt, entgegen gängiger Rede aber keineswegs automatisch auch trocken, wie die hier vorgestellten Beispiele zeigen. Gerade weil Mathematik abstrakt ist – sicher die abstrakteste unter allen Wissenschaften – und mathematische Gegenstände nur Zeichen sind, die es in der außermathematischen Wirklichkeit nirgends gibt, kann der mathematische Blick auch überall Anschluss und Zugang finden. Weil für Mathematik die Zahlen und nicht die Fakten (außerhalb der Mathematik) zählen, kann sie sogar über die Grenze zwischen Fakten und Fiktionen hinaus erzählen. Die Textaufgaben in frühneuzeitlichen Rechenbüchern schöpfen dieses Potenzial zur Vermittlung mathematischen Wissens voll aus. Der Blick in die (Mathematik-)Geschichte kann also durchaus auch heute ein Schlüssel zur Mathematik sein.

Nicht zuletzt aber bieten mathematische Textaufgaben aufgrund ihrer – fast alle Lebens- und Wissensbereiche umfassenden Reichweite – ein bemerkenswert vielfältiges Spektrum an Anknüpfungspunkten für interdisziplinäre kulturwissenschaftliche Fragestellungen. Mathematische Textaufgaben erlauben es, eine Brücke von großer Spannweite über die Grenze zwischen natürlicher und formaler Sprache hinweg zu schlagen: von Fragen der Mathematik(geschichte) über Fragen der Wissenschaftsgeschichte bis zur Germanistik.

Edith Feistner, Alfred Holl

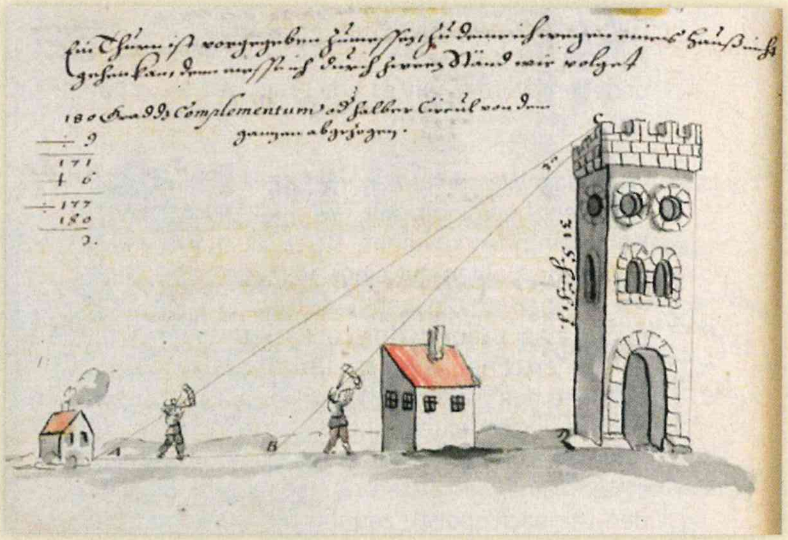
Buch und Onlineausstellung

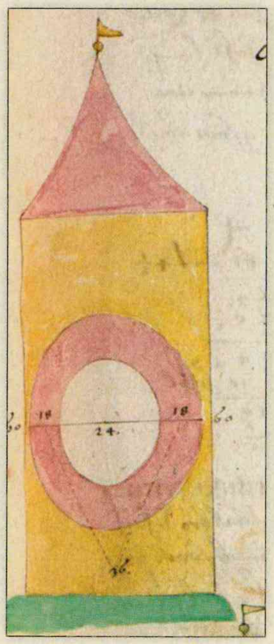
In einem interdisziplinären, von der Regensburger Universitätsstiftung Pro arte geförderten Kooperationsprojekt zwischen der Universität Regensburg und der TH Nürnberg wurden mathematische Textaufgaben untersucht. Studierende der TH Nürnberg erarbeiteten dazu eine Online-Ausstellung: https://www.regensburger-rechenmeister.de; sie basiert auf den neuesten Forschungsergebnissen in dem Buch „Erzählen und Rechnen in der frühen Neuzeit. Interdisziplinäre Blicke auf Regensburger Rechenbücher. Unter redaktioneller Mitarbeit von Jenny Huber und Nina Prifling", herausgegeben von Edith Feistner und Alfred Holl. Berlin/Münster 2016 (Regensburger Studien zur Literatur und Kultur des Mittelalters 1), 514 Seiten, 54,90 Euro.
ISBN 978-3-643-13172-0

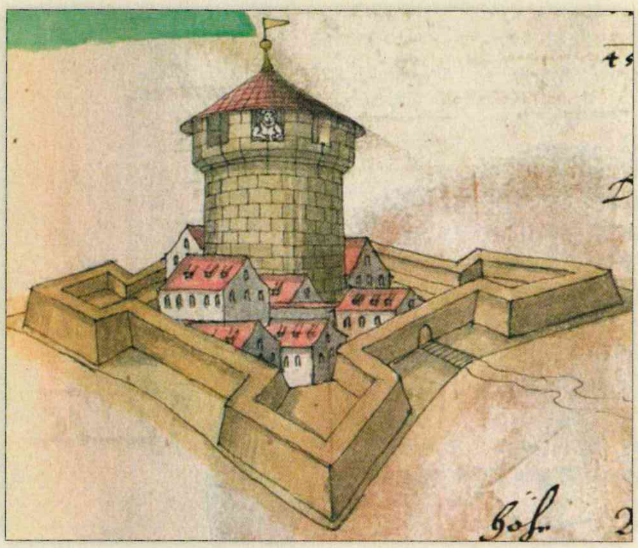
Wieviel kostet der Turm?

Aus den Maßen eines Turms und den Größen- und Preisangaben eines Mauersteins sind die Materialkosten des Turms zu bestimmen. Mit Außendurchmesser 60 Schuh, Innendurchmesser 24 Schuh und Höhe 112 Schuh ergibt sich das Mauervolumen (Differenz von Gesamtvolumen minus freiem Raum im Innern) zu 266.005 Schuh³. Ein Mauerstein habe ein Volumen von 27/4 Schuh³. Ohne Rücksicht auf Füllmaterial oder eventuelles Beschlagen der Steine wird das Mauervolumen näherungsweise durch das Volumen eines Steins geteilt, und man erhält die Anzahl der Steine mit 39.424. Da ein Mauerstein 55 Kreuzer kostet und ein Gulden 60 Kreuzern entspricht, kostet der Turm gut 36.000 Gulden.

Fotos: BSB München, Cgm 3789, 121r







Wie hoch ist der Turm?

„Ein Thurm ist vorgegeben zumessen, zu deme ich wegen eines Hauß nicht gehen kan, dene messe ich durch zween Ständ." Wegen eines Hauses, das „im Weg" steht, kann man die Entfernung eines Messpunktes vom Turm nicht ermitteln. Deshalb braucht man zwei Messpunkte, deren Abstand man kennt. Von jedem Messpunkt aus wird mit einem Quadranten der Winkel bestimmt, unter dem die Zinnen des Turms gegen die Horizontale erscheinen.

Foto: BSB München, Cgm 3788, 155v