Rainer Gebhardt (Hrsg.)

Rechenmeister und Mathematiker der frühen Neuzeit

Tagungsband
zum wissenschaftlichen Kolloquium

„Rechenmeister und Mathematiker
der frühen Neuzeit"

vom 21.–23. April 2017
in der Berg- und Adam-Ries-Stadt Annaberg-Buchholz

Veranstalter:

- Adam-Ries-Bund e.V.
- Stadtverwaltung Annaberg-Buchholz
- Landratsamt Erzgebirgskreis
- Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz

Zwei Rätsel aus ANTON NEUDÖRFFERS *Grosser Arithmetic*

Rudolf Haller und Alfred Holl

1 Einleitung

Buchstabenzahlenrätsel (damals *Wortrechnung*[1] genannt) erfreuten sich im 16. und 17. Jh. einer erstaunlichen Beliebtheit. Rechenmeister präsentierten sie in ihren Rechenbüchern an exponierter Stelle, natürlich ohne *Facit*, also ohne die Lösung anzugeben. Zielgruppe waren nicht nur Rechenschüler, sondern auch und gerade Rechenmeisterkollegen, die sich diesen ‚Herausforderungen' gerne stellten. Es gibt sogar einzelne Werke, die sich ausschließlich mit ungelösten Aufgaben anderer Rechenmeister beschäftigen, so etwa die *Resolutio* des Nürnberger Rechenmeisters SEBASTIAN KURZ (1576–1659). Als Lösungen von Buchstabenzahlenrätseln, die auf der aufsteigenden Zahlcodierung des Alphabets von 1 bis 24 basieren, erhält man deutsche oder lateinische Sinnsprüche oder Namen von Heiligen als Repräsentanten für das Datum ihres jeweiligen Festes.[2]
Zu diesem Trend trug auch ANTON NEUDÖRFFER (Nürnberg 1571–1628 Regensburg) bei. Seine ersten beiden Rätsel erschienen 1599 und 1616,[3] das dritte 1627 in einem vorab gedruckten Auszug aus seiner nie erschienenen *Grossen Arithmetic*. NEUDÖRFFER hatte immer wieder davon gesprochen, dieses Werk veröffentlichen zu wollen.[4] 1627 fügte er »*Fragmenta des Ersten Theils meiner grossen Arithmetic*« als *Appendix* an den Text der *Quarta Editio* seiner *Anweisung in die Arithmetic* an. Am Ende dieses *Appendix* (S. 219–220) sollen die Leser ermitteln, wie der Name des Heiligen lautet, an dessen Tag er sein Werk vollendet hat.
Der aus Burglengenfeld stammende Regensburger Rechenmeister GEORG WENDLER (1619–1688) hat sich mit allerlei Texten verschiedener Rechenmeister beschäftigt und deren Aufgaben gelöst, sicher zur Vorbereitung auf sein Rechenmeisterexamen, das er 1646 in Nürnberg bestand. Denn dabei hat er auch *Rech-*

[1] Auch GEORG WENDLER verwendet diesen Ausdruck als Überschrift für die beiden Buchstabenzahlenrätsel (*Memorialbuch*, 366r), die ihm 1646 bei seiner Rechenmeisterprüfung in Nürnberg gestellt wurden. Die hier in einem engeren Sinn gebrauchte Bezeichnung *Wortrechnung* hat grundsätzlich einen breiteren Bedeutungsumfang, der auch den Bereich der Zahlenmystik umfasst; zu Details vgl. bspw. Reich, Karin 1996, S. 160–165.
[2] Vgl. Stry 2016, S. 375. *I*, *J* und *U*, *V* werden wie im Lateinischen jeweils nur einmal gezählt.
[3] Ediert und gelöst in Haller 2008.
[4] Vgl. Haller 2016, S. 267–269.

nungen, *welche ich in meinen grossen Büchern in folio geschriben* vorgelegt.[5] Vermutlich hat er viele dieser Texte, die über Jahre entstanden sind, später – bis um 1663, dem Erscheinungsjahr des jüngsten von ihm bearbeiteten Rechenbuchs[6] – in einem großen Folioband[7] mit dem Titel *Analysis vel resolutio* zusammengefasst; dafür sprechen einerseits das einheitliche Schriftbild, andererseits Fehler, die sich als Abschreibfehler aus gegebenen Vorlagen erklären lassen.[8]

Von ANTON NEUDÖRFFERS Aufgaben löst WENDLER sowohl alle des Abschnitts zur *Regel Helcatain* (1r–75r) – darunter NEUDÖRFFERS zweites Zahlenrätsel von 1616 (73r–75r) – und des *Appendix* aus der *Quarta Editio* von 1627 (77v–113r) – darunter das dritte (111v–113r) – als auch die der *Zugab* aus der *Quinta Editio* von 1634 (113v–120).

Irgendwann muss WENDLER Zugang zu einem Manuskript erhalten oder gar in den Besitz eines solchen gekommen sein, in dem Teile oder die gesamte *Grosse Arithmetic* ANTON NEUDÖRFFERS enthalten waren. WENDLER hat daraus – alle? – Aufgaben abgeschrieben und zu jeder eine Lösung angefügt (120v–215r). U. E. sind die Lösungen eine eigenständige Leistung WENDLERS, da NEUDÖRFFER nirgends von seiner Art abweicht, am Ende jeder Aufgabe nur ein Fazit, aber keinen Lösungsweg anzugeben.

Auf Blatt 127r von Cgm 3789 steht eine weitere Wortrechnungsaufgabe, die ANTON NEUDÖRFFER in der *Grossen Arithmetic* gestellt und GEORG WENDLER gelöst hat. Im Folgenden werden wir die beiden Rätsel lösen.

2 Das Schlussrätsel des Appendix von 1627

Wir geben den Text NEUDÖRFFERS als Faksimile wieder.

Schluß.

DAmit du aberwiſſen mögeſt / was für ein Heiling ſelben tags/als diß vollendt/im Calēder eingezeichnet geweſt/ davon folgt d' bericht.

Erſtlich vmb wieviel der 5 Buchſtab den andern übertrifft/ ſo vielmal iſt auch d' neundte (mit zuthuung 5) mehr/dann erwehnter fünffte/vnd aller dreyer Summa/ zeiget nachfolgender Zahl zehentl 1½ mal + 1/welche Zahl iſt/wann mans theilet ꝑ 3 das 2/ꝑ 7 das 4/ꝑ 8 das 0/ꝑ 11 das 2/ꝑ 13 das 5/ꝑ 17 das 13/ ꝑ 19 das 10/ꝑ 23 das 16/ꝑ 59 das 23/vnd ꝑ 89 das 22 vberbleiben. Hingegen das quinduplat deß andern buchſtabens/quadruplat deß fünfften/ vnd triplat deß neundten Buchſtabens attribuirter zahl/bringen zuſammen die helfft deß jetztgefundenen vieltheiligen Numeri.

2 Vom Erſten Buchſtaben nimb 2/ Letzten 12/der reſt differentz vermehr/mit beyder □drat Summa / ſo gibts die oberwehnte vieltheilige Zahl ¾ mal + 1 /dagegen beyder Relict collect/ multiplicirt in die Differentz jhrer □drat/ bringt der gedachten ¾ jhr duplat ÷÷ 5/25.

3 Laß den achten Buchſtaben vmb 2 ringer ſeyn/vnd nim̃ alsdann ſein 6fachs □drat/ſampt jhme 7 mal 6 von 931 / ſo verbleibt eben ſo viel/ als wann er zum dritten mal in ſich ſelbſten vermehret worden were.

4 Letzlich nimb vom dritten Buchſtaben 18/ vierdten 12/ſechſten ½ / vnd addir entgegen dem ſiebenden Buchſtaben 12¼/ſo gibt das aggregatum, ſonderlich die relicta 4 zahlen in proportione continua. Wann man alle 4 in einander multiplicirt/kompt 3906¼. Die erſte aber mit der andern den 20tl deß vielgedachten theiligen Numeri. Vale.

---

[5] Wendler, *Memorialbuch*, 1r. Vgl. Folkerts/Reich 1989, S. 215.
[6] Vgl. Folkerts 2016, S. 286–287.
[7] Cgm 3789, Bayerische Staatsbibliothek München.
[8] Vgl. Holl 2015.

2.1 Unsere Lösung

NEUDÖRFFERs Alphabet umfasst 24 Buchstaben. Es enthält weder J noch V. Es gilt also $1 \leq x_i \leq 24$, $x_i \in \mathbb{N}$, wobei x_i der Zahlenwert des i-ten Buchstabens des Lösungsworts ist.

Da NEUDÖRFFER von einem neunten und einem letzten Buchstaben spricht, ist $1 \leq i \leq 10$, d. h., der Name des Heiligen besteht aus zehn Buchstaben.

Aus Abschnitt I erhält man

I. $x_5 : x_2 = (x_9 + 5) : x_5$

II. $x_2 + x_5 + (x_9 + 5) = \frac{1}{10} z \cdot \frac{3}{2} + 1$

NEUDÖRFFER führt eine *vielteilige* Zahl ein, die wir z nennen und die folgende Bedingungen erfüllen muss:

$z \equiv 2 \bmod 3$, $z \equiv 4 \bmod 7$, $z \equiv 0 \bmod 8$, $z \equiv 2 \bmod 11$,
$z \equiv 5 \bmod 13$, $z \equiv 13 \bmod 17$, $z \equiv 10 \bmod 19$, $z \equiv 16 \bmod 23$,
$z \equiv 23 \bmod 59$, $z \equiv 22 \bmod 89$.

Dabei sucht man natürlich nur die kleinstmögliche Zahl dieser Art.

III. $5x_2 + 4x_5 + 3(x_9 + 5) = \frac{1}{2} z$

Aus Abschnitt 2 gewinnt man die folgenden Gleichungen.

IV. $[(x_1 - 2) - (x_{10} - 12)] \cdot \left[(x_1 - 2)^2 + (x_{10} - 12)^2\right] = \frac{7}{4} z + 1$

V. $[(x_1 - 2) + (x_{10} - 12)] \cdot \left[(x_1 - 2)^2 - (x_{10} - 12)^2\right] = 2 \cdot \frac{7}{4} z - 5/25$

5/25 scheint ein Druckfehler zu sein, den WENDLER in seiner Abschrift der Aufgabenstellung zunächst sogar stehen lässt. Dann rechnet er statt mit 5/25 mit der Zahl 25.

Abschnitt 3 liefert

VI. $931 - \left[6 \cdot (x_8 - 2)^2 + 7 \cdot 6 \cdot (x_8 - 2)\right] = (x_8 - 2)^3$

Laut Abschnitt 4 sollen die vier Zahlen $x_3 - 18, x_4 - 12, x_6 - \frac{1}{2}$ und $x_7 + 12\frac{1}{4}$ eine geometrische Folge bilden; wenn wir ihren Quotienten q nennen, gilt

VII. $(x_3 - 18)q = x_4 - 12$

VIII. $(x_3 - 18)q^2 = x_6 - \frac{1}{2}$

IX. $(x_3 - 18)q^3 = x_7 + 12\frac{1}{4}$

Ferner soll gelten

X. $(x_3 - 18)(x_4 - 12)\left(x_6 - \frac{1}{2}\right)\left(x_7 + 12\frac{1}{4}\right) = 3906\frac{1}{4}$

XI. $(x_3 - 18)(x_4 - 12) = \frac{1}{20} z$.

Nun wenden wir uns der Lösung dieses Gleichungssystems zu. Dabei gehen wir den Abschnitten folgend vor.

Abschnitt 1 – erster Teil
Als Erstes bestimmen wir die vielteilige Zahl z.
Da die Summe von drei Buchstabennummern, von denen jede ≤ 24 ist, höchstens den Wert 72 erreichen kann, ist in **II** also $x_2+x_5+x_9 \leq 72$, woraus sich $z \leq 480$ ergibt.
Aus der letzten Kongruenz erhält man damit $z \in \{111, 200, 289, 378, 467\}$.
$z = 200$ erfüllt auch die Kongruenz $z \equiv 23 \bmod 59$.
Mühelos lässt sich überprüfen, dass $z = 200$ auch alle anderen Kongruenzen erfüllt. Die Gleichungen **II**, **III**, **IV**, **V** und **XI** erhalten damit die Form
II′ $x_2+x_5+(x_9+5)=31$
III′ $5x_2+4x_5+3(x_9+5)=100$
IV′ $\left[(x_1-2)-(x_{10}-12)\right]\cdot\left[(x_1-2)^2+(x_{10}-12)^2\right]=351$
V′ $\left[(x_1-2)+(x_{10}-12)\right]\cdot\left[(x_1-2)^2-(x_{10}-12)^2\right]=675$
XI′ $(x_3-18)(x_4-12)=10$.

Abschnitt 1 – zweiter Teil
Wir wenden uns jetzt den Gleichungen **I**, **II′** und **III′** zu.
Aus **II′** gewinnt man
II″. $x_9+5=31-x_2-x_5$.
Ersetzt man in **III′** x_9+5 durch den vorstehenden Ausdruck, so erhält man
III″. $x_5=7-2x_2$.
Unter Verwendung der Gleichungen **II″** und **III″** entsteht aus **I** die folgende quadratische Gleichung für x_2:
$3x_2^2-52x_2+49=0$ mit den Lösungen $1 \in \mathbb{N}$ und $\frac{49}{3} \notin \mathbb{N}$.
Mit $x_2 = 1 =$ **A** gewinnt man aus den obigen Beziehungen
$x_5 = 5 =$ **E** und $x_9 = 20 =$ **U**.
Damit haben wir • **A**• • **E** • • • **U** •.

Abschnitt 2
Aus den Gleichungen **IV′** und **V′** gewinnen wir die Werte von x_1 und x_{10}.
Setzen wir $u := (x_1 - 2)$ und $v := (x_{10} - 12)$, so erhalten wir
IV′ $[u-v]\cdot\left[u^2+v^2\right]=351$
V′ $[u+v]\cdot\left[u^2-v^2\right]=675 \quad\Leftrightarrow\quad [u+v]^2\cdot[u-v]=675$
Division von **V′** durch **IV′** ergibt
$\frac{(u+v)^2}{u^2+v^2}=\frac{675}{351}$, woraus man unschwer erhält:

$6u^2-13uv+6v^2=0$

$u=\frac{1}{12}\left(13v\pm\sqrt{169v^2-144}\right)$

$u=\frac{3}{2}v \;\vee\; u=\frac{2}{3}v.$

1. Fall: $u=\frac{3}{2}v$

$x_1-2=\frac{3}{2}(x_{10}-12)$ in **IV′** ergibt

$\frac{1}{2}(x_{10}-12)\cdot\frac{13}{4}(x_{10}-12)^2=351$

$(x_{10}-12)^3=27\cdot 8 \quad\Leftrightarrow\; x_{10}-12=6$

x_{10} = 18 = **S** $\quad\Rightarrow\quad$ x_1 = 11 = **L**.

Damit haben wir für den Namen des Heiligen **LA• • E • • • US**.

2. Fall: $u=\frac{2}{3}v$

$x_1-2=\frac{2}{3}(x_{10}-12)$ in **IV′** ergibt

$-\frac{1}{3}(x_{10}-12)\cdot\frac{13}{9}(x_{10}-12)^2=351$

$(x_{10}-12)^3=-27\cdot 27 \quad\Leftrightarrow\quad x_{10}-12=-9$

x_{10} = 3 = **C** $\quad\Rightarrow\quad$ x_1 = – 7, was nicht möglich ist.

Abschnitt 3

Wenden wir uns nun der kubischen Gleichung **VI** zu, die sich zu $x_8^3+30x_8-999=0$ vereinfachen lässt, also bereits in der reduzierten Form $x_8^3+3px_8+2q=0$ vorliegt mit p = 10 und $q = -\frac{999}{2}$.

Da $q^2+p^3=\left(-\frac{999}{2}\right)^2+10^3=\frac{1002001}{4}\geq 0$,

ergibt sich gemäß der Formel von CARDANO als einzige reelle Lösung

$$\begin{aligned} x_8 &= \sqrt[3]{\frac{999}{2}+\sqrt{\frac{1002001}{4}}}+\sqrt[3]{\frac{999}{2}-\sqrt{\frac{1002001}{4}}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{999}{2}+\frac{1001}{2}}+\sqrt[3]{\frac{999}{2}-\frac{1001}{2}} \\ &= \sqrt[3]{1000}+\sqrt[3]{-1}=9. \end{aligned}$$

x_8 ist also der Buchstabe **I**.

Abschnitt 4
Wir bestimmen den Quotienten q.
Aus den Gleichungen **VII** bis **IX** erhält man

$$\left(x_3-18\right)^4 q^6=3906\tfrac{1}{4}\ . \qquad (*)$$

Aus **VII** und **XI′** erhält man

$$\left(x_3-18\right)^2 q=10 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x_3-18\right)^2=\tfrac{10}{q}. \qquad (**)$$

(**) in (*) ergibt

$$\frac{100}{q^2}\cdot q^6=\frac{15625}{4} \quad \Leftrightarrow \quad q=\tfrac{5}{2}.$$

Nun können wir uns der Bestimmung der Buchstabennummern zuwenden.
Aus (**) gewinnt man

$$\left|x_3-18\right|=2 \quad \Leftrightarrow \quad x_3-18=\pm 2 \quad \Leftrightarrow \quad x_3=20 \ \vee \ x_3=16.$$

Aus **VIII** ergibt sich

$$x_6=\tfrac{1}{2}\pm 2\cdot 24 \quad \Leftrightarrow \quad x_6=13 \ \vee \ x_6=-12.$$

Daraus ist ersichtlich, dass – 2 keine Lösung von (**) sein kann; also ist x_3 = 20 = **U** und x_6 = 13 = **N**.
Aus **XI′** ergibt sich 2(x_4 – 12) = 10, also x_4 = 17 = **R**.
Setzt man x_3 = 20 in **IX′** ein, so erhält man $2=\frac{8}{125}\left(x_7+12\frac{1}{4}\right)$ und damit $x_7=19$ = **T**.
Damit sind alle Buchstabenzahlen bestimmt und das Rätsel gelöst:

Der Heilige heißt **LAURENTIUS**.

2.2 WENDLERs Lösung

Es ist vorauszuschicken, dass WENDLERs Aufgabenlösungen durchgängig den Charakter von Nebenrechnungen mit nur ganz wenigen verbindenden Erläuterungen und Begründungen haben. Mathematische Formeln stehen kommentarlos neben- und übereinander. Das Einsetzen einer Formel oder eines Ergebnisses in eine andere Gleichung wird nur durch gepunktete Linien dargestellt, eine Nummerierung der Formeln wird nicht verwendet.[9] Da ein heute gebräuchlicher transparenter Darstellungsstil fehlt, erfordert es trotz WENDLERs bestens lesbarer Handschrift größtenteils viel Zeit, seine Bearbeitungen genau nachzuvollziehen. Da diese Details für das Verständnis seiner Lösungswege aber nicht maßgeblich sind und auch keinen zusätzlichen Erkenntnisgewinn bringen, verzichten wir auf eine Edition[10] und beschränken uns auf eine zusammenfassende Skizze seiner Lösungswege. Selbst hierzu muss man noch viel zwischen den Zeilen lesen, um implizite Motivationen zu erschließen.

[9] Vgl. Stry 2016, S. 394.
[10] Eine exemplarische Edition einer WENDLER'schen Lösung findet sich in Stry 2016, S. 380–383.

Zu WENDLERs Vorgehensweisen, soweit man sie bis jetzt überblicken kann, sind zwei Dinge vorab zu bemerken: Er kümmert sich nie um alle Lösungen einer Polynomialgleichung, sondern nur um die in seinem Anwendungskontext relevante Lösung.[11] Eine Unbekannte und ihre Potenzen notiert er mit der traditionellen synthetischen Symbolik: steht für x, für x^2, (ähnelt teilweise sehr stark dem) für x^3, für x^4 etc. Braucht er eine zweite Unbekannte, so verwendet er dafür den Buchstaben a mit der expliziten analytischen Schreibweise für deren Potenzen: *aa*, *aaa*, *aaaa* etc. In diesem Zusammenhang bevorzugt WENDLER symmetrische Substitutionen mit $x + a$ und $x - a$.

Abschnitt 1

WENDLER bestimmt die *vielteilige* Zahl zu 200 durch Probieren mit den beiden größten Teilern 59 und 89.

Wegen **I** – betrachtet in der Form $x_5^2 = x_2(x_9+5)$ – spricht er von einer geometrischen Progression[12] aus den Zahlen x_2, x_5 und x_9.

Er substituiert die größte Zahl durch $x + a := x_9 + 5$ und die kleinste durch $x - a := x_2$.

(Die Substitution ist implizit wohl dadurch motiviert, dass die rechte Seite von **I** dann den einfachen Ausdruck $x^2 - a^2$ annimmt.)

Wegen **II′** erhält er $x_5 = 31 - 2x$.

Diese drei Werte, eingesetzt in **III′**, liefern $124 - 2a = 100$, woraus $a = 12$ folgt.

Mit diesem Wert und der genannten Substitution erhält er aus **I** die quadratische Gleichung

$$(31-2x)^2 = (x-12)(x+12) \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 124x + 1105 = 0,$$

zu der er mit quadratischer Ergänzung nur die ganzzahlige Lösung $x = 13$ ermittelt, ohne sich um die gebrochene Lösung $x = \frac{170}{6}$ zu kümmern.

Rücksubstitution liefert die Zahlen x_2, x_5 und x_9.

Abschnitt 2

Aus **IV** und **V** erhält WENDLER mit der symmetrischen Substitution
$x + a := x_1 - 2$ und $x - a := x_{10} - 12$

IV*. $4x^2a + 4a^3 = 351$

V*. $8x^2a \quad = 675.$

$2 \cdot$ **IV*** – **V*** liefert die rein kubische Gleichung $8a^3 = 27$ mit der reellen Lösung

[11] Die Behauptung, dass jede Gleichung n-ten Grades genau n Lösungen hat, wurde erstmals 1629 von ALBERT GIRARD (1595–1632) aufgestellt (vgl. Tropfke 1980, S. 152 f. und 492) und hatte sich bestimmt nicht so schnell in die Kreise der Rechenmeister verbreitet.

[12] In auf den ersten Blick irreführender Weise verwendet WENDLER das Wort *Progression* zweimal, sowohl in Abschnitt 1 (wo er die Gleichung **I** so interpretiert, ohne dass dieser Ausdruck in der Aufgabenstellung genannt wäre) als auch in Abschnitt 4 (in Übereinstimmung mit der dortigen Formulierung).

$a = 1½$.

In **V*** eingesetzt, entsteht die rein quadratische Gleichung $4x^2 = 225$, bei der er sich nur für die positive Lösung 7½ interessiert, die ihm durch Rücksubstitution die beiden Zahlen x_1 und x_{10} liefert.

Abschnitt 3

WENDLER substituiert $x := x_8 - 2$ und erhält aus **VI** die kubische Gleichung

VI*. $x^3 + 6x^2 + 42x = 931$.

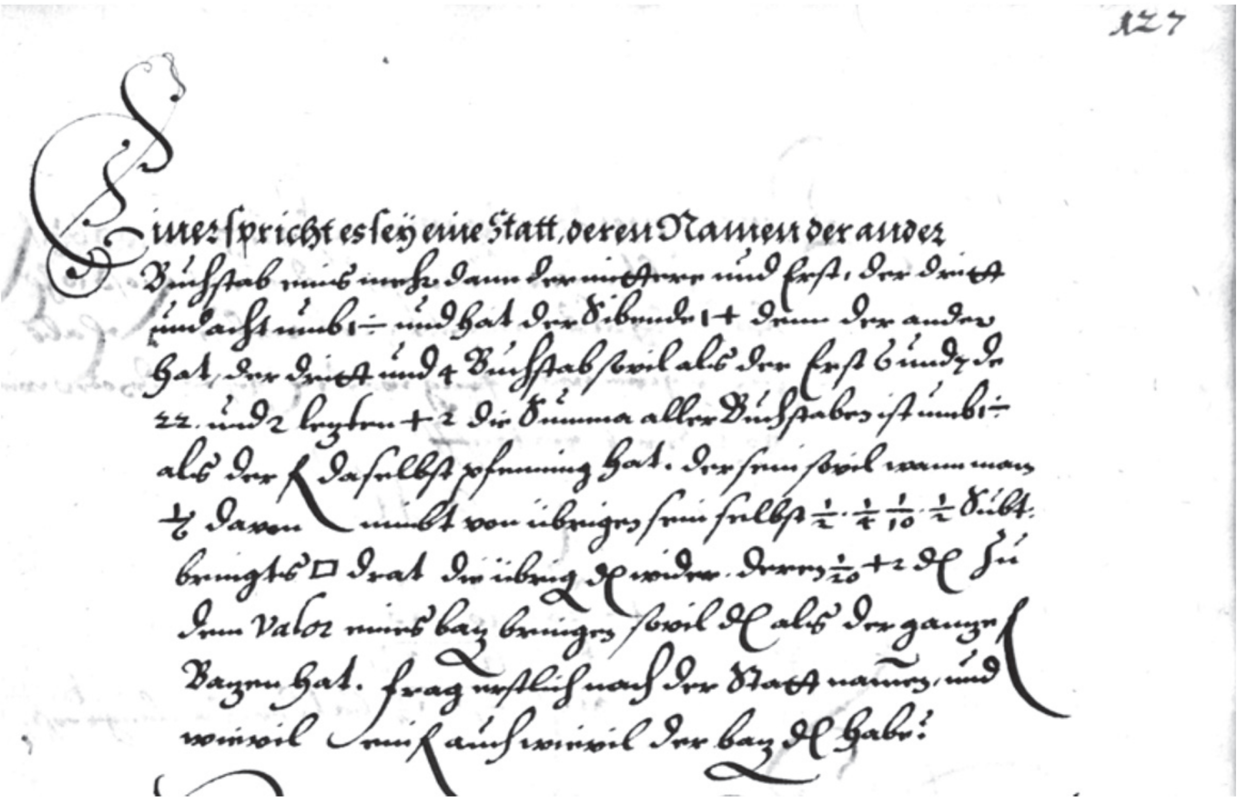
Er benutzt zur Lösung keine Formel – was mathematikhistorisch interessant gewesen wäre –, sondern errät die einzige reelle Lösung $x = 7$.
Wie er darauf kommt, schreibt er nicht. Es gelingt ihm wahrscheinlich durch Faktorzerlegung der Koeffizienten in **VI***: $x^3 + 6x^2 + 6 \cdot 7x = 19 \cdot 7 \cdot 7$.
Damit sieht man die Lösung recht schnell. Ersetzt man nämlich x durch 7, so enthält jeder Term den Faktor 7^2, durch den man kürzen kann:
$7 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7^2 = 19 \cdot 7^2 \Leftrightarrow 7 + 6 + 6 = 19$.
Also ist 7 Lösung der Gleichung. Zum Nachweis der Richtigkeit macht WENDLER die Probe, allerdings nicht durch Einsetzen, sondern indem er die rechte Seite von **VI*** als $931 = 133x$ interpretiert, wovon er dann die $42x$ der linken Seite abzieht. Die sich ergebenden $91x$ rechnet er um in $13x^2$, wovon er die $6x^2$ der linken Seite subtrahiert. Die rechts übrig bleibenden $7x^2$ sind gleich dem links verbliebenen x^3, womit linke Seite gleich der rechten Seite und somit die Probe richtig ist. Rücksubstitution liefert x_8.

Abschnitt 4

WENDLER argumentiert zunächst verbal:
Das Produkt der vier Zahlen ist gleich 3906 ¼.
Das Produkt der ersten beiden Zahlen ist gleich 10.
Division liefert für das Produkt aus der dritten und vierten Zahl den Wert $390\frac{5}{8}$.
Dann teilt er kommentarlos das Produkt aus der dritten und vierten Zahl durch das aus der ersten und zweiten. Dieses ergibt $q^4 = 39\frac{1}{16}$, woraus $q = 2½$.
Für die erste Zahl $x_3 - 18$ schreibt er nun x; er substituiert also $x := x_3 - 18$.
Das Produkt der ersten beiden Zahlen wird damit zu $x^2q = 10$, woraus $x^2 = 4$.
Er beschränkt sich ohne Begründung auf die positive Lösung $x = 2$ und ermittelt hieraus die Werte für x_3, x_4, x_6 und x_7.

3 Das Rätsel aus der *Grossen Arithmetic*

Auch die Stelle aus dem Cgm 3789 sei als Faksimile wiedergegeben und transkribiert.



Einer spricht es seÿ eine Statt, deren Namen der ander
Buchstab eines mehr dann der mittere und Erst, der dritt
und acht umb 1 ÷ und hat der Sibende 1 + denn der ander
hat, der dritt und 4 Buchstab sovil als der Erst 6 und 7de
22. und 2 leczten[13] + 2 Die Summa aller Buchstaben ist umb 1 ÷
als der fl daselbst pfenning hat. Der sein sovil wann man
$\frac{1}{6}$ davon nimbt von übrigen sein selbst $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\ \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2}$ Subt:
bringts Quadrat die übrigen ϑ wider. Deren $\frac{1}{20}$ + 2 ϑ zu
dem Valor eines baczen bringen sovil ϑ als der gancze fl
Baczen hat. Frag erstlich nach der Statt namen, und
wievil ein fl auch wievil der baczen ϑ habe?

[13] Übliche baierische Schreibung *cz* statt *tz*.

3.1 Unsere Lösung

Da NEUDÖRFFER von einem achten und einem letzten Buchstaben spricht, ist $1 \le i \le 9$, d. h. der Name der Stadt besteht aus neun Buchstaben, und der *mittere* Buchstabe ist der fünfte.

Sei x die Anzahl der Pfennige eines Guldens und y die Anzahl der Pfennige (der *Valor*) eines Batzens, dann ist $\frac{x}{y}$ die Anzahl der Batzen eines Guldens.

I. $x_2 = x_1 + 1$ **II**. $x_5 = x_1$

III. $x_3 = x_1 - 1$ **IV**. $x_8 = x_3$

V. $x_7 = x_2 + 1$ **VI**. $x_3 + x_4 = x_1$

VII. $x_6 + x_7 = 22$ **VIII**. $x_8 + x_9 = 22 + 2$

IX. $\sum_{i=1}^{9} x_i = x - 1$

WENDLER scheint sich in der Aufgabe verschrieben zu haben. Der letzte Bruch $\frac{1}{2}$ sollte $\frac{1}{20}$ lauten;[14] denn WENDLER rechnet mit $\frac{1}{20}$:

X. $\left[\left(1-\frac{1}{6}\right)x - \left(1-\frac{1}{6}\right)x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}\right)\right]^2 = \left(1-\frac{1}{6}\right)x$

XI. $\frac{1}{20}\left(1-\frac{1}{6}\right)x + 2 + y = \frac{x}{y}$.

Aus Gleichung **X** erhält man

$\left(\frac{5}{6}x\right)^2 \cdot \frac{1}{100} = \frac{5}{6}x \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = 120$. Die Zahl 0 ist keine Lösung.

Mittels der Gleichungen **I** bis **VIII** lassen sich die x_i, $i \le 2$, durch x_1 ausdrücken:

$x_2 = x_1 + 1$ $x_3 = x_1 - 1$ $x_4 = x_1$

$x_5 = x_1$ $x_6 = 20 - x_1$ $x_7 = x_1 + 2$

$x_8 = x_1 - 1$ $x_9 = 25 - x_1$.

Damit wird aus **IX** unter Verwendung von $x = 120$

IX′. $4x_1 + 47 = 119 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 18$.

Daraus erhält man für die weiteren x_i sukzessiv die Werte

19, 17, 1, 18, 2, 20, 17, 7 und damit **STRASBURG** für den Namen der Stadt.

Aus **XI** ergibt sich mit $x = 120$ für y

XI. $y^2 + 7y - 120 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}\left(-7 \pm \sqrt{49+480}\right) \quad \Leftrightarrow \quad y = 8 \quad \vee \quad y = -15$.

Da –15 als Lösung ausscheidet, können wir die Frage beantworten:
Der Gulden hat 120 Pfennig, der Batzen 8 Pfennig und der Gulden 15 Batzen.

---

[14] Bei den Punkten zwischen den Brüchen handelt es sich um keine Malpunkte, sondern um Aufzählungspunkte. Vgl. Reich, Ulrich 2016, S. 17. Zwischen dem zweiten und dritten Bruch hat WENDLER den Aufzählungspunkt vergessen.

3.2 WENDLERs Lösung

WENDLER verfolgt grundsätzlich die gleiche Lösungsstrategie wie wir. Sie ist aber nicht leicht nachvollziehbar, da er seine Darstellung in drei teilweise ineinander greifenden Spalten unübersichtlich anordnet und die Unbekannte x nacheinander in drei verschiedenen Bedeutungen verwendet:

1. WENDLER setzt x für die Anzahl der Pfennige eines Guldens und ermittelt über Nebenrechnungen ohne explizite Formulierung unserer Gleichung **X** für x den Wert 120.
2. Er setzt x für den Zahlenwert des ersten und mittleren (fünften) Buchstabens und formuliert (mit x statt unserem x_1) unsere Gleichung **IX′**, deren Lösung ihm Buchstabe um Buchstabe den Namen der Stadt liefert.
3. Er setzt x (statt unserem y) für die Anzahl der Pfennige eines Batzens. Damit erhält er unsere Gleichung **XI′**, die er nebenrechnungsartig mit quadratischer Ergänzung löst. Mit der Anzahl von 8 Pfennigen pro Batzen bekommt er unmittelbar auch die Anzahl der Batzen eines Guldens.

Literatur

Folkerts, Menso: Georg Wendler. In: Feistner, Edith; Holl, Alfred (Hrsg.): Erzählen und Rechnen in der frühen Neuzeit. Interdisziplinäre Blicke auf Regensburger Rechenbücher. Münster 2016, S. 279–294.

Folkerts, Menso; Reich, Karin: Rechenmeister. In: Folkerts, Menso; Knobloch, Eberhard; Reich, Karin (Hrsg.): Maß, Zahl und Gewicht. Mathematik als Schlüssel zu Weltverständnis und Weltbeherrschung. Weinheim 1. Aufl. 1989, S. 188–215.

Haller, Rudolf: Anton Neudörffer. In: Feistner, Edith; Holl, Alfred (Hrsg.): Erzählen und Rechnen in der frühen Neuzeit. Interdisziplinäre Blicke auf Regensburger Rechenbücher. Münster 2016, S. 259–278.

Haller, Rudolf: Anton Neudörffers Rätsel gelöst mit Hilfe von Sebastian Kurz und Johann Conrad Redlich. In: Gebhardt, Rainer (Hrsg.): Visier- und Rechenbücher der frühen Neuzeit. Annaberg-Buchholz 2008 (= Schriften des Adam-Ries-Bundes 19), S. 265–274.

Holl, Alfred: Georg Wendlers Bearbeitung von Anton Neudörffers *Grosser Arithmetic*. Unveröffentlichte Pilotstudie. Nürnberg: Technische Hochschule 2015.

Kurz, Sebastian: *Resolutio. Das ist: Aufflösung vieler schöner/ kunstreicher/ Cossischer vnnd Polygonalischer Exempla etlicher fürnemer vnnd berühmbter Rechenmeister/ so zu end jhrer Rechenbücher theils ohne Facit gesetzt*. Nürnberg: Johann Lantzenberger 1604 (BSB Res/4 Diss. 2646#Beibd. 4).

Neudörffer, Anton: *Künst- vnd ordentliche Anweisung in die Arithmetic/ als eine Mutter vieler Künsten; Auff die jetzige newe kurtz: vnd behende manier/ mit außerlesenen Exempeln und schönen Inventionibus geziert/ In XIII. Büchlein verfasset; Welchen auch die sinnreiche vnd berühmbte Regel Helcataim oder Positionum mit 199 Exempeln beygefügt/ Vnd mit einem sonderbaren APPENDICE vermehrt/ Alles durch Antonium Newdorffern von Newdegg/ Röm. Käys. Mayest. Diener/ &c. in Truck verfertigt. Editio IIII. Nürnberg/ Gedruckt vnd verlegt durch Simon Halbmayern/ Jm Jahr 1627* (BSB Math.p. 375).

Reich, Karin: Zwischen Theologie und Mathematik: Michael Stifels Endchrist (1532). In: Gebhardt, Rainer (Hrsg.): Rechenmeister und Cossisten der frühen Neuzeit. Annaberg-Buchholz 1996 (= Schriften des Adam-Ries-Bundes 7), S. 159–172.
Reich, Ulrich: Entstehung der arithmetisch-algebraischen Symbolik. In: Feistner, Edith; Holl, Alfred (Hrsg.): Erzählen und Rechnen in der frühen Neuzeit. Interdisziplinäre Blicke auf Regensburger Rechenbücher. Münster 2016, S. 13–34.
Stry, Yvonne: Kandlers Zahlenrätsel und Wendlers Lösung. In: Feistner, Edith; Holl, Alfred (Hrsg.): Erzählen und Rechnen in der frühen Neuzeit. Interdisziplinäre Blicke auf Regensburger Rechenbücher. Münster 2016, S. 375–396.
Tropfke, Johannes: Geschichte der Elementarmathematik. Bd. 1: Arithmetik und Algebra. 4. Aufl. Vollständig neu bearbeitet von Kurt Vogel, Karin Reich und Helmut Gericke. Berlin, New York 1980.
Wendler, Georg: *Analysis vel resolutio*. [Nürnberg, Regensburg ~1645–~1663] (Cgm 3789).
Wendler, Georg: *Neudörffers «Arithmetic»* [Bearbeitung von Aufgaben]. *Herrn Anthonij Neudörffers Modist Schreib: und Rechenmeister Inspector Examinator Visitator der Teutschen Schreib: und Rechen Schulen in Nurnberg Kunstreiche Helcataim Apendix Zugab und künstliche bschluß Exempla* […]. In: Wendler, Georg: *Analysis vel resolutio*, Cgm 3789, 1r–120r, Titel 1r [Paginierung von f. 1 doppelt].
Wendler, Georg: *Neudörffers «Grosse Arithmetic»* [Bearbeitung von Aufgaben]. *Herrn Anthonij Neudörffers Modist Schreib: und Rechenmeister Inspector Examinator Visitator der Teutschen Schreib: und Rechen Schulen in Nurnberg* […] *absonderlicher auffgaben und kunst Exempla seiner grossen Arithmetic, Dergleichen niemals gesehen auch in druck nicht kommen sind, nach Geomet: Cossischen Arithmetischen aufgaben, und Künstlichen Regeln*. In: Wendler, Georg: *Analysis vel resolutio*, Cgm 3789, 120v–215r, Titel 1r.
Wendler, Georg: *Memorialbuch* [Titel lt. 2v]. [Nürnberg, Regensburg ~1645–~1650] (Cgm 3788).