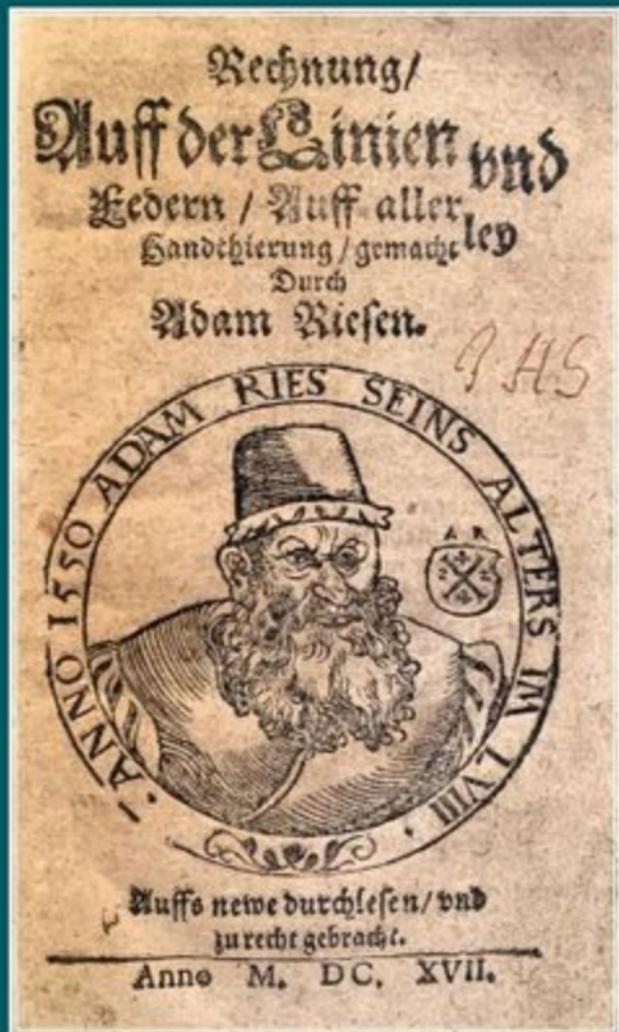


Jahrbuch des Adam-Ries-Bundes
2022



Annaberg-Buchholz

Zur Diskussion: Ein Vorschlag zur Optimierung der Aufgabenkategorien in Tropfke 1980, Kapitel 4

Von Alfred Holl

Schon die ältesten gedruckten Rechenbücher kategorisierten ihre Aufgaben mit ausführlichen Buchtiteln, Einführungen, Inhaltsverzeichnissen und Abschnittsüberschriften.¹ Die Klassifikationen waren aber in verschiedenen Rechenbüchern unterschiedlich, so dass bspw. eine Aufgabe zur Bestimmung des Preises für ein Tuch einer bestimmten Länge aus dem bekannten Preis für eine bekannte Länge unter den Rubriken Kauf/Verkauf, Dreisatz oder Bruchrechnen erscheinen konnte. Will man die Inhalte solcher Rechenbücher mathemathikhistorisch systematisch vergleichen, braucht man aber ein von einzelnen Spezifika unabhängiges allgemein gültiges Kategorisierungsschema. Ein solches ist auch erforderlich, wenn man handschriftliche Aufgabensammlungen inhaltlich beschreiben will, die zum Teil gar keine Zuordnungen der Aufgaben zu Kategorien enthalten.

Mit inhaltlich unstrukturierten Handschriften hatte es der Münchner Mathematikhistoriker Kurt Vogel (1888–1985) zu tun, als er die Aufgabenbestände des *Algorismus Ratisbonensis* und eines byzantinischen Rechenbuchs kategorisierte.² Seine Kategorisierungsschemata bilden in weiter entwickelter Form die Grundlage der Struktur von Kapitel 4 *Das angewandte Rechnen* in der vollständig neu bearbeiteten 4. Auflage 1980 der Arithmetik- und Algebra-Teile der 7-bändigen Geschichte der Elementarmathematik von Johannes Tropfke (1866–1939).³ Dieses Kapitel gestaltete Vogel zusammen mit Karin Reich (*1941).⁴

Eine Aufgabenkategorisierung kann aber nie vollständig sein. So heißt es am Ende von Kapitel 4: „Die Möglichkeit, mathematische Aufgaben und Zahlenrätsel zu bilden, ist unbegrenzt. So muss diese Berichterstattung über den Inhalt der Rechenbücher unvollständig bleiben.“⁵ Diese Aussage behält auch heute, über 40 Jahre später, ihre Gültigkeit. Dennoch sollte sie einer pragmatischen, evolutionären Optimierung der in Tropfke 1980, Kapitel 4, verwendeten Aufgabenkategorien (in diesem Beitrag ‚Tropfke-Kategorien‘ genannt, auch wenn sie auf Kurt Vogel zurückgehen) nicht entgegenstehen. Am Inhalt der Aussage wird aber auch mein eigener untenstehender Optimierungsvorschlag nichts ändern. Viele Rechenbücher bergen eben überraschende Aufgaben-Unikate, sodass spezielle Editionen immer neue (Fein-)Kategorien einführen müssen.⁶

¹ Bis auf ganz wenige Ausnahmen um 1480; vgl. Holl 2022.

² Die *Practica* des *Algorismus Ratisbonensis*, München 1954 (S. 155–156), und Ein byzantinisches Rechenbuch des 15. Jh.s, Wien 1968.

³ Zu den Auflagen dieses Werks vgl. Tropfke 1980, S. V.

⁴ Vgl. Tropfke 1980, S. VI. Vogels Kategorisierung war in Fachkreisen schon vorab bekannt, so dass sie Menso Folkerts in der Kategorisierung der von ihm edierten *Propositiones ad acuendos iuvenes* (Wien 1978) verwendete (S. 34–41).

⁵ Tropfke 1980, S. 660.

⁶ Überdies stellt sich bei komplexen Aufgaben, die mehrere Kategorien gleichzeitig betreffen, die Frage, ob man sie mehreren zuordnet oder nur einer ‚Haupt-Kategorie‘ entsprechend dem

Ein früherer Versuch einer Optimierung der Tropfke-Kategorien geht auf Warren Van Egmond 1996 zurück.⁷ Er belässt die Kategorisierung der Alltagsprobleme (Tropfke, Kapitel 4.1) weitgehend, geht aber in bezug auf die Unterhaltungsmathematik (Tropfke, Kapitel 4.2) sehr rigoros und revolutionär vor. Da er zudem eher auf die Zeit bis 1500 fokussiert, halte ich seinen Ansatz insgesamt für nicht zielführend. Ich werde ihn deshalb nicht umfassend diskutieren, sondern nur an den Stellen, die ich für sinnvoll halte, darauf zurückkommen. Für weitere Kategorisierungsansätze sei an dieser Stelle auf Egmond, S. 391, verwiesen.

Nachdem ich selbst bereits einige Hundert frühneuzeitliche Textaufgaben mit Lösungskommentaren ediert und Dutzende alter Rechenbücher in verschiedenen Sprachen beschrieben habe,⁸ stand ich häufig vor dem Problem, eine bestimmte Aufgabe(-ngruppe) einer Tropfke-Kategorie zuzuordnen: Ich bin dabei immer sehr behutsam vorgegangen und habe zwar einige neue Kategorien und viele neue Kategorie-Verfeinerungen eingeführt, aber stets ohne den Rahmen von Tropfke 1980 zu verlassen.

Nun halte ich die Zeit für gekommen, meine Erfahrungen zu einem umfassenden, pragmatischen, evolutionären Vorschlag zu vereinen und zur Diskussion zu stellen. Als Kategorie-Schlüssel der Tropfke-Kategorien verwende ich im Folgenden die entsprechende Abschnittsnummer bei Tropfke ohne die führende 4.

Zunächst möchte ich mögliche Grundprinzipien einer Kategorisierung vorstellen:

- 1 Erkennbarkeit der Kategorie an der Aufgabenstellung selbst, ohne einen konkreten Lösungsweg zu kennen. Darunter fällt bspw. die Tropfke-Kategorisierung der Alltagsprobleme.
- 2 Erkennbarkeit der Kategorie am algebraischen Lösungsansatz. Darunter fallen bspw. die Tropfke-Kategorien 2.1 *Lineare Probleme mit einer Unbekannten* und 2.2 *Lineare Probleme mit mehreren Unbekannten*.
- 3 Erkennbarkeit der Kategorie an dem zu verwendenden Lösungsschema. Diese Kategorisierung findet sich häufig in alten Rechenbüchern, wenn Aufgaben der Regula de tri, der Regula de tri inversa, der Regula quinque oder der Regula falsi zugeordnet werden.

Für eine mathemathikhistorische Kategorisierung ist Prinzip 3 nicht brauchbar, da alle mathematischen Aufgaben immer auf verschiedenen Wegen gelöst werden können. Bereits in der frühen Neuzeit haben bspw. manche Rechenbuchautoren die Regula quinque als zu komplex angesehen und vorgeschlagen, sie durch zweimalige Anwendung der Regula de tri zu ersetzen.⁹

,subjektiv‘ am schwierigsten erscheinenden Aufgaben-Anteil. Meine Tendenz geht zur zweiten Möglichkeit. Diese Frage stellt sich relativ selten und ist auch für eine effektive Kategorisierung nicht wirklich entscheidend, sodass ich sie im Rahmen dieses Beitrags nicht diskutieren werde.

⁷ Tropfke 1980 und Egmond 1996 zitiere ich in diesem Beitrag künftig ohne Jahreszahl.

⁸ Feistner/Holl 2016, Haller/Holl/Stry/Groß 2020, Haller/Holl 2022 und Holl 2022.

⁹ Der Rechenmeister Johann Kandler kommentiert etwa: *Ist mein meinung/ das man solche Exempla zweymal inn die Regel De Tri setze und volführe/ ist besser/ verstendiger und weniger irrsam (Arithmetica. Regensburg 1578, Jiv^v)*; vgl. Feistner/Holl 2016, S. 10 und 337.

Prinzip 2 setzt die Kenntnis eines algebraischen Ansatzes voraus, was auch Egmond (S. 399) kritisiert. Dieses Prinzip wirft zwei Schwierigkeiten auf:

- 1 Die Aufgabenstellung muss so verständlich formuliert sein, dass man tatsächlich einen algebraischen Lösungsansatz aufstellen kann. Das ist bei einigen Aufgaben, bei denen man keine zeitgenössische Lösung kennt, keineswegs trivial.
- 2 Formulierung der Aufgabenstellung und mathematische Betrachtungen können sich widersprechen. Beispiel „Gesucht sind zwei Zahlen. Ihre Summe sei 7, die Summe ihrer Quadrate 25.“ Hierzu kann man einen algebraischen Ansatz mit zwei Unbekannten x und y konstruieren, oder man sagt von Anfang an, die beiden gesuchten Zahlen seien x und $7 - x$. Dann hat man mathematisch nur eine Unbekannte.

Deshalb scheidet m. E. auch Prinzip 2 für eine mathematikhistorische Kategorisierung aus. Ich plädiere daher für eine durchgängige Kategorisierung nach Prinzip 1.

Zwischen verschiedenen Kategorisierungsprinzipien zu wechseln, halte ich für methodisch problematisch. Das geschieht leider in Tropfke, wo Kategorisierungen nach Prinzip 1 (Alltagsmathematik) und Prinzip 2 (Unterhaltungsmathematik) gemischt werden. Man wird also im zweiten Bereich am stärksten überarbeiten müssen.

Im Folgenden werde ich nun die übergeordneten Tropfke-Kategorien durchgehen, schärfere Definitionen, Bezeichnungsänderungen, allgemein gültige Verfeinerungen und Zuordnungsänderungen vorschlagen.

Gegenüber Tropfke neu eingeführte Kategorie-Schlüssel setze ich in spitze Klammern $\langle \rangle$, solche mit erheblich veränderter Kategorie-Bezeichnung in eckige Klammern $[]$. Zu Aufgabentypen, die bei Tropfke nicht vorkommen, nenne ich jeweils mindestens ein Beispiel. Die Kategorie-Bezeichnungen gestalte ich so ausführlich, dass bei Kategorien mit 3- und 4-stelligem Kategorie-Schlüssel jeweils die übergeordnete Kategorie erkennbar ist.

Die Trennung zwischen Alltagsmathematik und Unterhaltungsmathematik erweist sich m. E. als einfach (siehe Egmond, S. 392, ebenso). Letztere umfasst dabei nachspielbare Aufgaben (z. B. 2.1.3.2 *Torwächter im Apfelgarten*) und rein fiktive Aufgaben (z. B. [2.1.2.2] *Leistungsaufgaben – Tierische Akteure*).¹⁰

Bei Unterhaltungsmathematik schließe ich auch Aufgaben der reinen Mathematik (also solche mit unbenannten Zahlen) explizit mit ein ($\langle 2.1.1.7 \rangle$ *Gesucht ist eine unbenannte Zahl*, $\langle 2.2.1.5 \rangle$ *Additive Zerlegung – unbenannte Zahlen*).¹¹

¹⁰ Vgl. Haller/Holl et al. 2020, Bd. 1, S. 339–340.

¹¹ Mit Tropfkes Kapitelüberschrift *Das angewandte Rechnen* sollten reinmathematische Aufgaben eigentlich schon per definitionem unberücksichtigt bleiben. Solche werden aber dann doch diskutiert, bspw. in 2.2.1 *Zerlegung einer Zahl in zwei oder mehrere Summanden*.

Nun zu den Kategorien im Einzelnen.

1 *Probleme aus dem täglichen Leben*

1.1 *Kauf und Verkauf*. Tropfke bietet keine Verfeinerung, und angesichts der Vielzahl enthaltener Aufgabentypen kann auch ich keine allgemein gültige Verfeinerung vorschlagen. Kauf- und Verkaufs-Aufgaben, die explizite Prozentrechnung enthalten, würde ich unter 1.4 *Prozentrechnung* subsumieren.

1.2 *Warentausch (Stich)* verfeinere ich in:¹²

<1.2.1> *Warentausch – Keine speziellen Stichpreise*

<1.2.2> *Warentausch – Einfach*

<1.2.3> *Warentausch – Komplex (mit Gewinnanteil, Cashanteil, Termin)*. Diese Kategorie enthält verschiedenste Unterkategorien, die kaum alle in einer systematischen Darzustellen zu erfassen sind und teils wenig praktische Bedeutung, sondern eher unterhaltungsmathematischen Charakter haben.¹³ Tropfke nennt einige Fälle geordnet nach steigender Komplexität.

1.3 *Arbeits- und Dienstleistungen* verfeinere ich in:

<1.3.1> *Arbeitsleistungen – Transporte: Fuhrlohn*

<1.3.2> *Arbeitsleistungen – Menschliche Akteure: Handwerker, Säufer*

<1.3.3> *Arbeitsleistungen – Unbelebte Akteure: Mahlgänge einer Mühle*

<1.3.4> *Arbeitsleistungen – Brunnenbau*.

Diese Verfeinerung ist wahrscheinlich nicht vollständig.

Zur Definition dieser Kategorie ist wichtig, dass alle beteiligten Akteure jeweils die gleiche Leistung erbringen. Dagegen geht es in 2.1.2 *Leistungsaufgaben* um verschiedene Leistungen der Akteure.

Vorzeitig abgebrochene Arbeits- und Dienstverhältnisse klassifiziere ich unter die neue Kategorie <1.15> *Abgebrochene Vertragsverhältnisse*.

1.4 *Prozentrechnung*. Tropfke bietet keine Verfeinerung, und angesichts der Vielzahl enthaltener Aufgabentypen kann auch ich keine allgemein gültige Verfeinerung vorschlagen.

1.5 *Tara- und Fusti-Rechnung* verfeinere ich in:

<1.5.1> *Tara- und Fusti-Rechnung – Nur Tara-Rechnung*

<1.5.2> *Tara- und Fusti-Rechnung – Nur Fusti-Rechnung*

<1.5.3> *Tara- und Fusti-Rechnung – Beides*.

1.6 *Zinsrechnung* verfeinere ich in (wie Tropfke selbst mit dort nicht nach dem allgemeinen Schema nummerierten Überschriften):

<1.6.1> *Zinsrechnung – Einfacher Zins*

<1.6.2> *Zinsrechnung – Zinseszins (zusammengesetzter Zins)*

<1.6.3> *Zinsrechnung – Rentenrechnung, Ratenzahlung, Annuitäten*.

¹² Vgl. Egmond, S. 396.

¹³ Vgl. Kategorisierung und Kommentar in Haller/Holl et al. 2020, Bd. 1, S. 325–329. Christoff Rudolff schreibt am Ende seines Stich-Abschnitts, dass man schwache Schülerköpfe nicht mit praktisch nutzlosen komplexen Stich-Aufgaben belasten sollte: *Alhie zu wissen das ich die ersten 5 stich allayn außgenomen/ die andern alle meer zu erhebung des verstandts/ als von nutz wegen geschriben/ wil darumb kainn bloeden kopf darmit als mit notturftiger rechnung beladen haben (Kunstliche Rechnung. Wien 1526, M 4^v).*

1.7 *Rabatt und Diskont* verfeinere ich in:¹⁴

<1.7.1> *Rabatt und Diskont* – Einfacher Rabatt

<1.7.2> *Rabatt und Diskont* – Zusammengesetzter Rabatt.

1.8 *Saldo- und Terminrechnung* verfeinere ich in:

<1.8.1> *Saldo- und Terminrechnung* – Mehrere Schuldbeträge (Zinszahlen)

<1.8.2> *Saldo- und Terminrechnung* – Gegenseitige Schulden (Kompensation)¹⁵

<1.8.3> *Saldo- und Terminrechnung* – Zahlung auf Termin¹⁶

<1.8.4> *Saldo- und Terminrechnung* – Leiharbeit.¹⁷

Diese Verfeinerung ist wahrscheinlich nicht vollständig.

1.9 *Gesellschaftsrechnung (proportionale Verteilung)* verfeinere ich in:

<1.9.1> *Gesellschaftsrechnung* – gleiche Anlagezeiten der Gesellschafter¹⁸

<1.9.2> *Gesellschaftsrechnung* – verschiedene Anlagezeiten der Gesellschafter¹⁹

<1.9.3> *Gesellschaftsrechnung* – Bergwerksrechnung²⁰

<1.9.4> *Gesellschaftsrechnung* – Reiseprobleme²¹

<1.9.5> *Gesellschaftsrechnung* – Sonderfall: Summe der Anteile ungleich 1.

Diese Verfeinerung ist wahrscheinlich nicht vollständig.

Vorzeitig abgebrochene Gesellschaften klassifiziere ich unter die neue Kategorie

<1.15> *Abgebrochene Vertragsverhältnisse*.

1.10 *Faktorrechnung* würde ich nicht weiter verfeinern.

1.11 *Vermietungen, Vieh- und Weidepacht* verfeinere ich in:

<1.11.1> *Vermietungen, Pacht* – Vermietungen

<1.11.2> *Vermietungen, Pacht* – Vieh- und Weidepacht.

1.12 *Geldwechsel und Maßumrechnungen* verfeinere ich in:

<1.12.1> *Geldwechsel und Maßumrechnungen* – Nur Geldwechsel

<1.12.2> *Geldwechsel und Maßumrechnungen* – Nur Maßumrechnungen

<1.12.3> *Geldwechsel und Maßumrechnungen* – Beides

<1.12.4> *Geldwechsel und Maßumrechnungen* – *Regula inventionis*.²²

¹⁴ Vgl. Egmond, S. 397.

¹⁵ Bspw. Neudörffer, Anton: *Grosse Arithmetica*. Edition in Haller/Holl et al. 2020, Bd. 2, S. 232–233.

¹⁶ Bspw. Neudörffer, Anton: *Grosse Arithmetica*. Edition in Haller/Holl et al. 2020, Bd. 2, S. 406–408.

¹⁷ Bspw. Neudörffer, Anton: *Grosse Arithmetica*. Edition in Haller/Holl et al. 2020, Bd. 2, S. 285–286.

¹⁸ *Regula societatis simplex*.

¹⁹ *Regula societatis temporum*.

²⁰ Besonderheiten bei Grubenanteilen; vgl. Tropfke, S. 568.

²¹ Beispiel: Mehrere Kaufleute mieten ein Schiff. Unterwegs steigen weitere zu. Für jeden Fahrgast ist der angemessene Reisepreis zu bestimmen (Kandler, Johann: *Arithmetica*. Regensburg 1578, Kiii^rv. Edition in Feistner/Holl 2016, S. 352–353).

²² Es soll berechnet werden, wieviel kleinere Einheiten eine größere ergeben; bspw. Ries, Adam: *Rechnung auff der linihen vnd federn*. Erfurt 1522, S. 79; Rudolff, Christoff: *Kunstliche Rechnung*. Wien 1526, K 8^r. Vgl. Deschauer, Stefan, in: Gebhardt, Rainer (Hg.): Die Entwicklung der Mathematik in der frühen Neuzeit. Annaberg-Buchholz 2020, S. 231–238.

1.13 *Münzlegierungen* braucht m. E. nicht weiter verfeinert zu werden. Es geht in dieser Kategorie um Gold- und Silberrechnung, um Feingewichte, Feingehalte und Preise von Edelmetallen.

1.14 *Mischungsaufgaben* umfasst im Gegensatz zu 1.13 *Münzlegierungen* Mischungen beliebiger Materialien mit unterschiedlichen Gewichtsanteilen. Diese Kategorie verfeinere ich in:

[1.14.1] *Mischungsaufgaben – Beschickung des Tiegels*. Es geht es um Legierungen von Metallen.²³

[1.14.2] *Mischungsaufgaben – Verschiedene Mischungen*.

Die ursprüngliche Tropfke-Kategorie 1.14.1 wird [1.14.2]; 1.14.2 *Das Problem der 100 Vögel* gehört zur Unterhaltungsmathematik und wird – zusammen mit 2.2.6, wo es bei Tropfke ein zweites Mal behandelt wird – vollständig nach <2.2.1.1> *Additive Zerlegung – Problem der 100 Vögel* verschoben.

<1.15> *Abgebrochene Vertragsverhältnisse* schlage ich als neue alltagsmathematische Kategorie vor, um diese Thematik an einem Ort zusammenzufassen. Derartige Aufgaben fanden sich ursprünglich in 1.3 *Arbeits- und Dienstleistungen*, 1.9 *Gesellschaftsrechnung*, 1.11 *Vermietungen, Vieh- und Weidepacht*, 2.1.5.3 *Unterbrochenes Dienstverhältnis*. Man löst sie teils einfach mit proportionaler Verteilung, teils aufwändig²⁴ bspw. bei abgebrochener Weidepacht.

2. *Probleme der Unterhaltungsmathematik*

[2.1] *Gesucht ist eine Zahl: lineare und nicht-lineare Probleme*. Diese Kategorie-Bezeichnung ersetzt die ursprüngliche *Lineare Probleme mit einer Unbekannten*, die ich für ungeeignet halte, wie ich oben bei meiner Ablehnung von Prinzip 2 ausgeführt habe. Zudem ignoriert diese Bezeichnung die Existenz nicht-linearer Probleme, die sich gar nicht selten finden und denen aber auch sonst keine Tropfke-Kategorie zugeordnet ist.

[2.1.1] *Gesucht ist eine Zahl: lineare und nicht-lineare Probleme – Verschiedenes* vereinigt die ursprünglichen Kategorien 2.1.1 *Hau-Rechnungen* und Teile der ursprünglichen Kategorie 2.1.5 *Diverse Probleme*. Die erstere Kategorie verlangt die Kenntnis eines algebraischen Lösungsansatzes. Deshalb halte ich sie für ungeeignet, wie ich oben bei meiner Ablehnung von Prinzip 2 ausgeführt habe.²⁵

²³ Regula alligationis. Bspw. Rudolff, Christoff: *Kunstliche Rechnung*. Wien 1526, M 6^{rv}.

²⁴ Bspw. Rudolff, Christoff: *Kunstliche Rechnung*. Wien 1526, L 7^r; Neudörffer, Anton: *Grosse Arithmetik*. Edition in Haller/Holl et al. 2020, Bd. 2, S. 250–251, 263–264.

²⁵ Zudem ist bei Tropfke nicht sauber definiert, was als Hau-Rechnung gelten soll. Es geht um lineare Gleichungen, die mindestens einen Bruchteil der Unbekannten enthalten. Dieser Fall kommt aber auch in anderen Aufgaben vor, z. B. in der ursprünglichen Kategorie 2.1.5.5 *Wieviel Uhr ist es?*, die dort nicht unter die Haurechnungen subsumiert wird. Man kann nicht jede Aufgabe mit Bruchteilen der Unbekannten unter die Überschrift Hau-Rechnungen stellen, das wäre zu wenig differenziert.

Ich nehme die folgende Verfeinerung an:

2.1.1.1 *Gesucht ist eine benannte Zahl – Gott-grüß-euch-Aufgaben*

2.1.1.2 *Gesucht ist eine benannte Zahl – Frage nach dem Alter.*

2.1.1.3 *Gesucht ist eine benannte Zahl – Stange im Wasser.*

<2.1.1.4> *Gesucht ist eine benannte Zahl – Regula aequalitatis (Einkauf gleicher Mengen)* ist die ursprüngliche Kategorie 2.1.5.1.

<2.1.1.5> *Gesucht ist eine benannte Zahl – Zu viel und zu wenig* ist die ursprüngliche Kategorie 2.1.5.2. *Gesucht ist eine Anzahl Personen, auf die Objekte gleichmäßig verteilt werden sollen. Die Nennung von zwei Unbekannten bei Tropfke* ist irreführend.

<2.1.1.6> *Gesucht ist eine benannte Zahl – Sonstige* umfasst bspw. die Bestimmung einer Stofflänge²⁶, der Größe der künftigen Rationen bei verlängerter Belagerung²⁷, der Länge einer Zündschnur²⁸ etc.

<2.1.1.7> *Gesucht ist eine unbenannte Zahl.*

2.1.2 *Leistungsaufgaben* verfeinere ich in (semantische Verfeinerung statt der Aufzählungsverfeinerung bei Tropfke):

[2.1.2.1] *Leistungsaufgaben – Menschliche Akteure* umfasst die ursprünglichen Kategorien 2.1.2.2 *Hausbau* und 2.1.2.6 *Trinker verschiedener Leistung*.

[2.1.2.2] *Leistungsaufgaben – Tierische Akteure* ist die ursprüngliche Kategorie 2.1.2.4 *Löwe, Wolf und Hund*.

Diese Zeile links einrücken

[2.1.2.3] *Leistungsaufgaben – Unbelebte Akteure* umfasst die ursprünglichen Kategorien 2.1.2.1 *Eigentliche Zisternenaufgaben*, 2.1.2.3 *Schiff mit mehreren Segeln* und 2.1.2.5 *Mühle mit verschiedenen Mahlgängen*.

Zur Definition dieser Kategorie ist wichtig, dass die beteiligten Akteure unterschiedliche Leistungen erbringen. Dagegen geht es in 1.3 *Arbeits- und Dienstleistungen* um die jeweils gleiche Leistung aller Akteure.

2.1.3 *Schachtelaufgaben* verfeinere ich wie Tropfke in:

2.1.3.1 *Schachtelaufgaben – Geschäftsreisen*

2.1.3.2 *Schachtelaufgaben – Torwächter im Apfelgarten*

2.1.3.3 *Schachtelaufgaben – Si quis intrat monasterium*

2.1.3.4 *Schachtelaufgaben – Sonstiges*

2.1.3.5 *Schachtelaufgaben – Unbekannte Erbschaft.*

2.1.4 *Bewegungsaufgaben* verfeinere ich in:²⁹

[2.1.4.1] *Bewegungsaufgaben – Verfolgung*

[2.1.4.2] *Bewegungsaufgaben – Begegnung*

[2.1.4.3] *Bewegungsaufgaben – Vor und zurück.*

Auch Tropfke bringt diese Typen, allerdings im Rahmen einer sehr differenzierten Systematik (S. 590). In den nummerierten Überschriften wird dort im Gegensatz

²⁶ Bspw. Neudörffer, Johann: *Aigentliche Verzeichnus*. Edition in Haller/Holl 2022, Aufgaben 12–14.

²⁷ Bspw. Wendler, Georg. *Arithmetica practica*. Regensburg 1667, L 1^{rv}. Edition in Feistner/Holl 2016, S. 342–344.

²⁸ Bspw. Neudörffer, Anton: *Grosse Arithmetick*. Edition in Haller/Holl et al. 2020, Bd. 2, S. 307.

²⁹ Vgl. Egmond, S. 407.

zu allen anderen Abschnitten jedoch völlig unpassend eine geographische Verfeinerung gewählt.

[2.1.5] *Zeitlicher Anteil*³⁰ verfeinere ich in:

[2.1.5.1] *Zeitlicher Anteil – Der faule Arbeiter* ist die ursprüngliche Kategorie 2.1.5.4. Gesucht ist der zeitliche Anteil der Vertragslaufzeit, in dem der faule Arbeiter fleißig war.

[2.1.5.2] *Zeitlicher Anteil – Frage nach der Uhrzeit* ist die ursprüngliche Kategorie 2.1.5.5. Gesucht ist der zeitliche Anteil des hellen Tages, der seit Sonnenaufgang verstrichen ist.

[2.2] *Gesucht sind mehrere Zahlen: lineare und nicht-lineare Probleme.* Diese Kategorie-Bezeichnung ersetzt die ursprüngliche *Lineare Probleme mit mehreren Unbekannten* mit einer analogen Begründung wie oben bei [2.1].

2.2.1 *Additive Zerlegung einer Zahl* verfeinere ich in:

<2.2.1.1> *Additive Zerlegung – Problem der 100 Vögel* umfasst die ursprüngliche gleichnamige Kategorie 1.14.2 und Teile der ursprünglichen Kategorie 2.2.6 *Das Problem der 100 Vögel und die Zehenaufgaben.*

<2.2.1.2> *Additive Zerlegung – Regula caecis, Zehenaufgaben* umfasst Teile der ursprünglichen Kategorie 2.2.6 *Das Problem der 100 Vögel und die Zehenaufgaben.*

<2.2.1.3> *Additive Zerlegung – Zwillingserbenschaft* ist die ursprüngliche Kategorie 2.7.4, die bei Tropfke m. E. unpassend den Anordnungsproblemen zugeordnet ist. Die Verteilung einer Erbschaft verlangt die additive Zerlegung des Erbes.

<2.2.1.4> *Additive Zerlegung – benannte Zahlen – Sonstige.*³¹

<2.2.1.5> *Additive Zerlegung – unbenannte Zahlen.*

Ich vereinige in dieser Kategorie alle Aufgabentypen, die das gemeinsame Merkmal einer Zerlegung in mehrere Summanden tragen. Gesucht sind dabei Teile eines Ganzen. Obwohl es die Kategorie 2.2.1 bereits bei Tropfke gibt, sind dort nur reinmathematische Probleme genannt, die ich unter <2.2.1.5> *Additive Zerlegung – unbenannte Zahlen* klassifiziere. Einige andere Typen werden bei Tropfke nicht zugeordnet, sondern nur verstreut behandelt.

2.2.2 *Gesucht sind mehrere Zahlen – Die gefundene Börse.* Gesucht sind der Geldbetrag in der gefundenen Börse und die Beträge in den Börsen der Finder.

2.2.3 *Gesucht sind mehrere Zahlen – Einer allein kann nicht kaufen.* Gesucht sind die unterschiedlichen, für einen Kauf nicht ausreichenden Geldbeträge, die mehrere Kaufwillige bei sich haben.

³⁰ Die ursprüngliche Kategorie 2.1.5 *Lineare Probleme – Diverse Probleme* entfällt. 2.1.5.1 *Regula aequalitatis* wird <2.1.1.4>, 2.1.5.2 *Zu viel – zu wenig* wird <2.1.1.5>, 2.1.5.3 *Das unterbrochene Dienstverhältnis* ist eine Aufgabenstellung der Alltagsmathematik und wird nach <1.15> *Abgebrochene Vertragsverhältnisse* verschoben, 2.1.5.4 *Der faule Arbeiter* fragt nach einem zeitlichen Anteil und wird [2.1.5.1], 2.1.5.5 *Wieviel Uhr ist es?* fragt nach einem zeitlichen Anteil und wird [2.1.5.2].

³¹ Bspw. Erbschaftsteilungen; siehe Egmond, S. 403, Sub-type c [of Type 4].

2.2.4 *Gesucht sind mehrere Zahlen – Geben und Nehmen.* Gesucht sind die Geldbeträge verschiedener Personen.

2.2.5 *Gesucht sind mehrere Zahlen – 2 Becher und 1 Deckel.* Gesucht sind die Gewichte der drei Geschirrtteile.

Wahrscheinlich wird man zu [2.2] *Gesucht sind mehrere Zahlen* weitere Unterkategorien finden.

2.3 *Rechnende Geometrie* verfeinere ich in:

2.3.1 *Rechnende Geometrie – Ebene – Der pythagoreische Lehrsatz*

2.3.2 *Rechnende Geometrie – Ebene – Ähnlichkeit von Dreiecken*

<2.3.3> *Rechnende Geometrie – Ebene – Weitere Aufgaben zu gerade berandeten Figuren*

<2.3.4> *Rechnende Geometrie – Ebene – Aufgaben zum Kreis*

<2.3.5> *Rechnende Geometrie – Raum – Aufgaben zu Kugel, Kegel, Zylinder, Fass.*

Tropfke bietet noch Verfeinerungen zu 2.3.1 und 2.3.2. Die Kategorien 2.3.1 bis <2.3.5> enthalten aber jeweils so viele verschiedene Aufgabentypen, dass ich dafür keine weitergehenden allgemein gültigen Verfeinerungen vorschlagen kann.

2.4 *Folgen und Reihen* verfeinere ich wie Tropfke in:

2.4.1 *Folgen und Reihen – Arithmetische*

2.4.2 *Folgen und Reihen – Geometrische.*

Tropfke bietet noch eine Verfeinerung zu 2.4.2. Die Kategorien 2.4.1 und 2.4.2 enthalten aber jeweils so viele verschiedene Aufgabentypen, dass ich dafür keine weitergehenden allgemein gültigen Verfeinerungen vorschlagen kann.

2.5 *Restprobleme* verfeinere ich wie Tropfke in:

2.5.1 *Restprobleme – Die Regula Ta-yen*

2.5.2 *Restprobleme – Die Eierfrau*

2.5.3 *Restprobleme – Die drei Schwestern.*

Diese Verfeinerung ist wahrscheinlich nicht vollständig.

2.6 *Das Erraten von Zahlen* verfeinere ich wie Tropfke in:

2.6.1 *Das Erraten von Zahlen – Rückwärtsrechnen*

2.6.2 *Das Erraten von Zahlen – Erraten mit 9*

2.6.3 *Das Erraten von Zahlen – Gerad oder Ungerad*

2.6.4 *Das Erraten von Zahlen – Ratespiel im Kreis*

2.6.5 *Das Erraten von Zahlen – Wo ist der Ring?*

2.6.6 *Das Erraten von Zahlen – Die drei Spieler?*

2.6.7 *Das Erraten von Zahlen – Verteilung von drei Gegenständen.*

Diese Verfeinerung ist wahrscheinlich nicht vollständig.

2.7 *Anordnungsprobleme und andere Scherzaufgaben* verfeinere ich in:

2.7.1 *Anordnungsprobleme – Gleicher Erlös trotz Verkaufs verschiedener Mengen*

2.7.2 *Anordnungsprobleme – Gewinn beim Verkauf um den Einkaufspreis*

2.7.3 *Anordnungsprobleme – Das Joseph-Spiel*

[2.7.4] *Anordnungsprobleme – Wolf, Ziege und Kohlkopf*

[2.7.5] *Anordnungsprobleme – Umfüllaufgaben*

[2.7.6] *Anordnungsprobleme – Kombinatorische Probleme*.³²

Diese Verfeinerung ist wahrscheinlich nicht vollständig.

Die ursprüngliche Kategorie 2.7.4 *Zwillingerbschaft* halte ich nicht für ein Anordnungsproblem, sondern für eine additive Zerlegung und habe sie daher nach <2.2.1.3> umgeschlüsselt.

2.8 *Sonstige Probleme*. Als letzte braucht man eine Kategorie für seltener vorkommende Aufgabentypen, z. B. figurierte Zahlen³³ und Wortrechnung³⁴.

Nun freue ich mich auf eine produktive Diskussion meines Vorschlags.

Literaturverzeichnis

Egmond, Warren Van: Types and traditions of mathematical problems: A challenge for historians of mathematics. In: Folkerts, Menso (Hg.): *Mathematische Probleme im Mittelalter. Der lateinische und arabische Sprachbereich* (= Wolfenbütteler Mittelalterstudien 10). Wiesbaden 1996, S. 379–428.

Feistner, Edith; Holl, Alfred (Hg.): *Erzählen und Rechnen in der frühen Neuzeit. Interdisziplinäre Blicke auf Regensburger Rechenbücher* (= Regensburger Studien zur Literatur und Kultur des Mittelalters 1). Berlin 2016.

Haller, Rudolf; Holl, Alfred: *Johann Neudörffer der Ältere (Nürnberg 1497–1563 Nürnberg) und seine Aigentliche Verzeichnus* [Arbeitstitel]. Annaberg-Buchholz 2022. In Vorbereitung.

Haller, Rudolf; Holl, Alfred (Hg.); Stry, Yvonne; Groß, Alexander: *Anton Neudörffer (Nürnberg 1571–1628 Regensburg) und seine Grosse Arithmetik*. Teilband 1: Historisches Umfeld und Begleittexte. Teilband 2: Edition nach Georg Wendler (= Regensburger Studien zur Literatur und Kultur des Mittelalters 5). Berlin 2020.

Holl, Alfred: *The earliest printed arithmetic book in each of 35 European languages – with an appendix of the earliest printed arithmetic book in each of 45 selected languages worldwide in less detail* (= ^{Leer}Strömstad Akademis Fria Skriftserie Nr. 23). Strömstad: ^{rechts}Strömstad Akademie 2022 (E-Book). ^{bündig}

Akademi

Tropfke, Johannes: *Geschichte der Elementarmathematik*. Bd. 1: *Arithmetik und Algebra*. 4. Aufl. Vollständig neu bearbeitet von Kurt Vogel, Karin Reich und Helmut Gericke. Berlin, New York 1980.

³² Bspw. Neudörffer, Anton: *Grosse Arithmetik*. Edition in Haller/Holl et al. 2020, Bd. 2, S. 164, 332.

³³ Bspw. Neudörffer, Anton: *Grosse Arithmetik*. Edition in Haller/Holl et al. 2020, Bd. 2, S. 234–237.

³⁴ Bspw. Neudörffer, Anton: *Grosse Arithmetik*. Edition in Haller/Holl et al. 2020, Bd. 2, S. 178–180.