Schriften des Adam-Ries-Bundes Annaberg-Buchholz - Band 31

Rainer Gebhardt (Hrsg.)

Rechenkunst und Mathematik in der frühen Neuzeit

Tagungsband
zum wissenschaftlichen Kolloquium

„Rechenkunst und Mathematik
in der frühen Neuzeit“

vom 21.–23. April 2023
in der Berg- und Adam-Ries-Stadt Annaberg-Buchholz

Veranstalter:
- Adam-Ries-Bund e. V.
- Stadtverwaltung Annaberg-Buchholz
- Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Rechenkunst und Mathematik in der frühen Neuzeit
Tagungsband zum wissenschaftlichen Kolloquium vom 21.–23. April 2023 in der Berg- und Adam-Ries-Stadt Annaberg-Buchholz / Hrsg. Rainer Gebhardt: Adam-Ries-Bund, Annaberg-Buchholz, 2023.
(Schriften des Adam-Ries-Bundes Annaberg-Buchholz; Bd. 31)
ISBN 978-3-944217-53-6

Stiftungen der Erzgebirgssparkasse

Die Herausgabe erfolgt mit freundlicher Unterstützung der Sparkassenstiftung Annaberg.

Herausgeber: Prof. Dr. Rainer Gebhardt
Vorsitzender des Adam-Ries-Bundes e. V. Annaberg-Buchholz

Abbildung auf dem Titel: *Typus geometrie* aus
Gregor Reisch: Margarita philosophica nova, Basel 1517.
Adam-Ries-Museum (ARB-1040-33)

Umschlaggestaltung: Helmstedt | Kluge | Rom, Niederwiesa,
Zusammenstellung: Prof. Dr. Rainer Gebhardt, Chemnitz,
Druck: Medienzentrum der TU Bergakademie Freiberg.

Adam-Ries-Bund e. V.
Johannisgasse 23
09456 Annaberg-Buchholz
www.adam-ries-bund.de

Inhaltsverzeichnis

Polygonalzahlen und ihre Quadrat-, Pronic- und Trigonalwurzeln

Alfred Holl

1 Grundlagen

Dezentrale Polygonalzahlen (Vieleckzahlen, *n*-Eck-Zahlen) können interpretiert werden als Summenwerte von mit 1 beginnenden endlichen arithmetischen Reihen oder geometrisch als Anzahlen von Scheibchen (Steinchen), mit denen sich ineinander verschachtelte konvexe *n*-Ecke legen lassen, bei denen eine Ecke fest bleibt.[1] Polygonalzahlen tauchen schon im 16. Jh. in deutschsprachigen gedruckten Rechenbüchern auf,[2] meines Wissens jedoch ohne genaue Erklärung der damit verbundenen Termini *Quadrat*-, *Pronic*- und *Trigonalwurzel*.

Eine Ausnahme bildet die handschriftliche Aufgabensammlung *Analysis vel resolutio* (Cgm 3789; ca. 1645–1665) des Regensburger Rechenmeisters Georg Wendler (Burglengenfeld 1619–1688 Regensburg), in der er sich auf der Basis des *Newen Künstlichen Rechenbuchs* (1564) der Freiberger Rechenmeister Oswald Ulman und Caspar Thierfelder, im Detail jedoch weit darüber hinausgehend, mit Polygonalzahlen befasst (457^r–480^v)[3]. Die im Folgenden formal deduktiv dargestellten Fakten zu *Quadrat*-, *Pronic*- und *Trigonalwurzeln* ergeben sich aus einer akribischen Rekonstruktion seiner mentalen Konzepte durch eine Analyse seiner Ausführungen, in denen sich diese Konzepte in verbaler und nicht mathematisch formaler und expliziter Form ohne jegliche Verallgemeinerungen niederschlagen.

Ausgangspunkt der Überlegungen zu Polygonalzahlen sind drei Folgen:

---

[1] Zu Details und Veranschaulichungen vgl. Rudolf Haller, Alfred Holl: Anton Neudörffer und seine Grosse Arithmetic, Bd. 1, 2020, S. 311–313.

[2] Polygonalzahlen wurden bereits im antiken Griechenland untersucht (Johannes Tropfke: Geschichte der Elementar-Mathematik, Bd. 6, ²1924, S. 6–8. Im deutschsprachigen Raum finden sie sich bspw. bei Michael Stifel (1487–1567) (*Arithmetica integra*, 1544, 22^r–24^r) und später bei denjenigen Rechenmeistern, von denen der Nürnberger Rechenmeister Sebastian Kurz (1576–1659) in seiner *Resolutio* (1604) diesbezügliche Aufgaben löst, nämlich bei Oswald Ulman und Caspar Thierfelder (1564; vgl. Rainer Gebhardt: Das Rechenbuch der Freiberger Rechenmeister Oswald Ulman und Caspar Thierfelder von 1564. In diesem Band), Johann Kraft (1591), Gottschalk Müllinghaus (1602), Moritz Zo(h)n (1602) und Anton Neudörffer (1599; vgl. Rudolf Haller: Anton Neudörffers Rätsel, gelöst mit Hilfe von Sebastian Kurz und Johann Conrad Redlich. In: Rainer Gebhardt (Hg.): Visier- und Rechenbücher der frühen Neuzeit (= Schriften des Adam-Ries-Bundes 19), 2008, S. 265–274). Festzustellen, wann und mit welchem Tiefgang Polygonalzahlen in deutschsprachigen Rechenbüchern behandelt wurden, ist nicht Gegenstand dieses Kurzbeitrags.

[3] Blatt-Angaben beziehen sich hier und im Folgenden immer auf Cgm 3789 (BSB München).

Quadratzahlen: $q_r \quad := r^2$

Proniczahlen: $p_{r-1} := (r-1)^2 + (r-1) = (r-1)r = r^2 - r$

Trigonalzahlen: $t_{r-1} \;:= \frac{(r-1)r}{2} = \frac{r^2-r}{2} = \frac{p_{r-1}}{2}$

Hierzu betrachtet man Zahlentripel aus als zusammengehörig definierten Quadratzahlen, Proniczahlen und Trigonalzahlen:

$$(q_r;\ p_{r-1};\ t_{r-1}) = \left(r^2;\ (r-1)r;\ \frac{(r-1)r}{2}\right)$$

Darauf soll eine Wurzelfunktion definiert werden, die gleichzeitig die Indizes der Folgenglieder widerspiegelt.
Aus der ersten Komponente zieht man die übliche **Quadratwurzel**.
Aus der zweiten Komponente zieht man die Pronicwurzel (pronische Wurzel).
Die **Pronicwurzel** aus einer Proniczahl (pronischen Zahl) $z = (r-1)r$ wird definiert als der kleinere der beiden Faktoren von *z* (nur positive Lösung):[4]

$$r - 1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4(-z)}}{2} = \frac{\sqrt{1+4z} - 1}{2}$$

Aus der dritten Komponente zieht man die Trigonalwurzel. Die **Trigonalwurzel** aus einer Trigonalzahl $\frac{(r-1)r}{2}$ wird definiert als der kleinere der beiden Faktoren im Zähler des Bruchs.
Daher kann man im Kontext dieser Tripel sagen, dass Pronicwurzel und Trigonalwurzel immer um 1 kleiner sind als die zugehörige Quadratwurzel.[5]
Die Anwendung der so definierten Wurzelfunktion auf das o.g. Zahlentripel liefert das folgende Tripel:

$$(r;\ r-1;\ r-1)$$

Dieses Konzept wird auf Polygonalzahlen angewendet.

2 Berechnung von Polygonalzahlen (Vieleckzahlen)

Für $n \geq 3$ berechnet man die *r*-te *n*-Eck-Zahl (*n*-Eck-Zahl der Ordnung *r*) $v(n,r)$ definitionsgemäß mit folgender Formel (Summenwert der endlichen arithmetischen Reihe zur endlichen arithmetischen Folge $a_{n,i}$ $(1 \leq i \leq r)$):

$$v(n,r) := \sum_{i=1}^{r} a_{n,i} = \left(a_{n,1} + a_{n,r}\right) \cdot \frac{r}{2} := \big(1 + 1 + (r-1)(n-2)\big) \cdot \frac{r}{2}$$

$$= \frac{r\big((n-2)r - (n-4)\big)}{2} \quad \text{mit} \quad a_{n,i} := 1 + (i-1)d \quad \text{und} \quad d := n-2$$

[4] Wendler, *Arithmetica practica* 1666, U4v–U5v; Cgm 3789, 462r, Letzteres fehlerhaft, 476r.
[5] 670r, teilweise fehlerhaft.

Es gilt: $v(3, r-1) = t_{r-1} = \frac{(r-1)r}{2} = \frac{r^2 - r}{2}$ und $v(4, r) = q_r = r^2$.

$v(n, r)$ kann als Folge mit zwei Variablen *n* und *r* betrachtet werden. Daher kann man sie auf zwei Arten interpretieren:

1. Bei festem n als (nicht arithmetische) Folge mit (variablem) Index r (wie in obiger Summenformel): Jedes $v(n, r)$ ist der Summenwert der endlichen arithmetischen Reihe zur endlichen arithmetischen Folge $a_{n,i}$ $(1 \leq i \leq r)$.
2. Bei festem *r* als (arithmetische!) Folge mit (variablem) Index *n*: Sie hat folgende Schrittweite:

$$v(n+1, r) - v(n, r) = \frac{(r-1)r}{2} = t_{r-1}$$

Das ist genau die (*r* – 1)-te Trigonalzahl. Man fügt also in jedem Additionsschritt dem *r*-ten *n*-Eck das (*r* – 1)-te 3-Eck hinzu und erhält so das *r*-te (*n* + 1)-Eck. Damit lässt sich eine Polygonalzahl $v(n, r)$ folgendermaßen schreiben:

$$v(n, r) = r^2 + (n-4)\left(\frac{(r-1)r}{2}\right) = q_r + (n-4)t_{r-1} \qquad (1)$$

In Worten: Die *r*-te *n*-Eck-Zahl ist gleich Summe
r-te Quadratzahl plus (*n* – 4)-mal (*r* – 1)-te Trigonalzahl.

Oder anders, aber dieses Bildungsgesetz verwendet Wendler nicht:

$$v(n, r) = \left(\frac{r(r+1)}{2}\right) + (n-3)\left(\frac{(r-1)r}{2}\right) = t_r + (n-3)t_{r-1}$$

In Worten: Die *r*-te *n*-Eck-Zahl ist gleich Summe
r-te Trigonalzahl plus (*n* – 3)-mal (*r* – 1)-te Trigonalzahl.

Mit der Tatsache, dass das Doppelte einer Trigonalzahl gleich der zugehörigen Proniczahl ist, lässt sich die Formel (1) auch auf eine andere Art verstehen – unterschiedlich für gerade und ungerade *n*:

Bei geradem *n* ist $\frac{n-4}{2}$ ganzzahlig und (1) wird zu

$$v(n, r) = r^2 + \frac{n-4}{2} \cdot \big((r-1)r\big) = q_r + \frac{n-4}{2}\, p_{r-1}$$

In Worten: Die *r*-te *n*-Eck-Zahl ist gleich Summe
r-te Quadratzahl plus $\frac{n-4}{2}$ -mal (*r* – 1)-te Proniczahl.
Beispiel: Die *r*-te 10-Eck-Zahl ist gleich Summe
r-te Quadratzahl plus dreimal (*r* – 1)-te Proniczahl.

Bei ungeradem *n* ist $\frac{(n-1)-4}{2}$ ganzzahlig und (1) wird zu

$$v(n, r) = r^2 + \frac{n-1-4}{2} \cdot \big((r-1)r\big) + \left(\frac{(r-1)r}{2}\right) = q_r + \frac{n-1-4}{2}\, p_{r-1} + t_{r-1}$$

In Worten: Die r-te n-Eck-Zahl ist gleich Summe r-te Quadratzahl
plus $\frac{n-1-4}{2}$ -mal (r – 1)-te Proniczahl plus einmal (r – 1)-te Trigonalzahl.
Beispiel: Die r-te 11-Eck-Zahl ist gleich Summe r-te Quadratzahl
plus dreimal (r – 1)-te Proniczahl plus einmal (r – 1)-te Trigonalzahl.

Zusammengefasst bedeutet das:

Die <u>r-te n-Eck-Zahl</u> ist gleich Summe <u>r-te Quadratzahl</u>
plus nullmal bis mehrmals <u>(r – 1)-te Proniczahl</u>
plus nullmal oder einmal <u>(r – 1)-te Trigonalzahl</u>.

Für gerades n: Summe r-te Quadratzahl
plus $\frac{n-4}{2}$ -mal (r – 1)-te Proniczahl plus nullmal (r – 1)-te Trigonalzahl.

Für ungerades n: Summe r-te Quadratzahl
plus $\frac{n-1-4}{2}$ -mal (r – 1)-te Proniczahl plus einmal (r – 1)-te Trigonalzahl.

Die bisherigen Ausführungen werden in der folgenden Tabelle veranschaulicht: im oberen Teil die drei Ausgangsfolgen mit den Werten ihrer Folgenglieder in Abhängigkeit von r bzw. r – 1; die Folge t_{r-1} gibt die Differenz $v(n+1,r) - v(n,r)$ an; im unteren Teil in jeder Zeile eine n-Eck-Zahlen-Folge mit der Anzahl der zu summierenden Quadrat-, Pronic- und Trigonalzahlen sowie mit den Werten ihrer Folgenglieder $v(n,r)$ in Abhängigkeit von r.

Folgen				r	1	2	3	4	5	6	7	8
Quadrat-zahl q_r					1	4	9	16	25	36	49	64
Pronic-zahl p_{r-1}					0	2	6	12	20	30	42	56
Trigonal-zahl t_{r-1}					0	1	3	6	10	15	21	28
n	Anzahl Quadrat-zahlen	Anzahl Pronic-zahlen	Anzahl Trigonal-zahlen	r	1	2	3	4	5	6	7	8
3	0	0	1		1	3	6	10	15	21	28	36
4	1	0	0		1	4	9	16	25	36	49	64
5	1	0	1		1	5	12	22	35	51	70	92
6	1	1	0		1	6	15	28	45	66	91	120
7	1	1	1		1	7	18	34	55	81	112	148
8	1	2	0		1	8	21	40	65	96	133	176
9	1	2	1		1	9	24	46	75	111	154	204
10	1	3	0		1	10	27	52	85	126	175	232
11	1	3	1		1	11	30	58	95	141	196	260
12	1	4	0		1	12	33	64	105	156	217	288
13	1	4	1		1	13	36	70	115	171	238	316

3 Analyse von Polygonalzahlen

Bei frühneuzeitlichen Aufgaben wird zu einer natürlichen Zahl v, die als Polygonalzahl $v(n,r)$ zu interpretieren und zu der r zu bestimmen ist, auch immer das n vorgegeben. Sonst entstünde aus der Berechnungsformel für $v(n,r)$ eine unterbestimmte Gleichung mit zwei Unbekannten. Außerdem ist die Umkehrabbildung von $v(n,r)$ (als Funktion von zwei Variablen betrachtet) in keiner der beiden Variablen injektiv. Man kann also zu einem v nicht einfach und eindeutig ‚das' r bestimmen. $r(v)$ ist nicht eindeutig, und deshalb ist $r(v,n)$ als Umkehrfunktion von $v(n,r)$ in r zu definieren.

Denn: Es gibt Tupel $(n_1,r_1) \neq (n_2,r_2)$ mit $v(n_1,r_1) = v(n_2,r_2)$. Mit anderen Worten, es gibt natürliche Zahlen, die auf verschiedene Weise als Polygonalzahlen interpretiert werden können; die Interpretierbarkeit einer natürlichen Zahl als Polygonalzahl ist nicht notwendig eindeutig.

Beispielsweise ist $v(n,2) = n$ für alle natürlichen n, und damit ist jede andere Polgonalzahl immer auch als ein $v(n,2)$ interpretierbar.

Abgesehen von dieser trivialen mehrdeutigen Interpretierbarkeit ist auch $v(n,r)$ für $r > 2$ nicht injektiv, denn es existieren nichttriviale mehrdeutige Interpretationen, bspw. $36 = v(13;3) = v(4;6)$ und $70 = v(13;4) = v(5;7)$.[6] –

Durch Ausklammern von r in der Berechnungsformel für Polygonalzahlen kann man sich auf die Ebene der eingangs definierten Wurzeln begeben. Man erhält – hier für ungerades n veranschaulicht:

$$v(n,r) = r\left(r + \frac{n-1-4}{2}\cdot(r-1) + \frac{r-1}{2}\right) \qquad (2)$$

Der erste Faktor in (2) wird von Wendler als ***n*-Eck-Quadratwurzel von v** bezeichnet. Sie ist die Quadratwurzel der Quadratzahl r^2 in (1).

Dieser Ausdruck ist unglücklich, da man ja nicht die Quadratwurzel einer Polygonalzahl bestimmt, sondern ihre Ordnung. Er wurde in seiner lateinischen Form „radix quadrata" schon von Sebastian Kurz in seiner *Resolutio* (1604), eii[r], bei der Lösung des Wortrechnungsrätsels von Ulman und Thierfelder (1564) kritisch gesehen; Kurz spricht stattdessen von einer n-Eck-Wurzel (in diesem Fall „radix decagonalis"). Offenbar gab es damals konkurrierende Terminologien.

Den zweiten Faktor in (2) bezeichnet Wendler als ***n*-Eck-Wurzel von v**.[7] Diese kann auch halbzahlig sein. Ist r die n-Eck-Quadratwurzel von v, so gilt:

Die *n*-Eck-Wurzel von v ist gleich Summe *n*-Eck-Quadratwurzel von v
plus nullmal bis mehrmals (r – 1)-te Pronicwurzel
plus nullmal oder ein halbmal (r – 1)-te Trigonalwurzel.

[6] Es gibt auch natürliche Zahlen n, die neben der trivialen Interpretation als $n = v(n,2)$ nur genau eine weitere Interpretation als Polygonalzahl besitzen, bspw. $18 = v(7;3)$ und $40 = v(8;4)$.

[7] Diese Definition von Wendler erscheint als nicht sinnvoll: Man kann die so definierte n-Eck-Wurzel von v nicht direkt bestimmen, sondern muss immer zuerst die n-Eck-Quadratwurzel von v berechnen.

Für gerades n: Summe n-Eck-Quadratwurzel (d. h. r)
plus $\frac{n-4}{2}$ -mal (r – 1)-te Pronicwurzel
plus nullmal (r – 1)-te Trigonalwurzel.
Für ungerades n: Summe n-Eck-Quadratwurzel (d. h. r)
plus $\frac{n-1-4}{2}$ -mal (r – 1)-te Pronicwurzel
plus ein halbmal (r – 1)-te Trigonalwurzel.[8]

Eine Polygonalzahl $v(n,r)$ kann immer dargestellt werden als Produkt aus der n-Eck-Quadratwurzel von v (d. h. r) mal einer Summe aus der n-Eck-Quadratwurzel von v plus nullmal bis mehrmals der (r – 1)-ten Pronicwurzel plus nullmal oder ein halbmal der (r – 1)-ten Trigonalwurzel.

Eine Polygonalzahl $v(n,r)$ ist damit das Produkt aus ihrer n-Eck-Quadratwurzel und ihrer n-Eck-Wurzel.

Das wird bei Wendler natürlich nirgends explizit und allgemein so angesprochen.

Die n-Eck-Quadratwurzel r einer Polygonalzahl $v(n,r)$ wurde – wie heute auch – aus einer quadratischen Gleichung berechnet:[9]

$$(n-2)r^2 - (n-4)r - 2v = 0$$

Zur Lösung haben Ulman und Thierfelder (1564) eine siebenspaltige Tafel entworfen[10], die auch Wendler übernimmt und erweitert[11]. Darin steht jede Zeile für ein bestimmtes n. Die Tafel ist die Grundlage einer Rechenvorschrift, die sich mit Variablen $s_i(n)$ für die Spaltenwerte in heutiger Formelsprache so schreiben lässt:

$$r(v,n) = \frac{\sqrt{s_3(n)v + s_4(n)} - s_5(n)}{s_6(n)} + s_7(n)$$

Sebastian Kurz (*Resolutio* 1604, eii^{r}) verwendet eine Rechenvorschrift, die einer Variante der heutigen Formel für die Lösung von $ax^2 + bx + c = 0$ entspricht, nämlich:

$$x = \frac{\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2} - \frac{b}{2}}{a}.$$

[8] Vgl. 464^{v} für Pentagonalzahlen und 467^{v}–468^{r} für Hexagonalzahlen.
[9] Zur Lösung bei Gottschalk Müllinghaus (1602) vgl. Richard Hergenhahn: Gottschalck Muellinghausen von Schwelm. In: Rainer Gebhardt (Hg.): Arithmetische und algebraische Schriften der frühen Neuzeit (= Schriften des Adam-Ries-Bundes 17), 2005, S. 67–92.
[10] Vgl. Rainer Gebhardt: Das Rechenbuch der Freiberger Rechenmeister Oswald Ulman und Caspar Thierfelder von 1564. In diesem Band.
[11] 484^{r}–485^{v}.