Alfred Holl

Das Quadrivium im Mittelalter

Teil 1: Arithmetik

Die arithmetischen Algorithmen im Algorismus von al-Khwarizmis *Liber ysagogarum*
Die Regensburg-Prüfeninger Fassung einer mittelalterlichen Einführung in das Rechnen mit arabischen Zahlen

II.1. Zahldarstellung

Stellenwert-System / Positions-System:

Zahlenwert eines Ziffernzeichens hängt von dessen Form und Position ab.

$$2222$$
$$2 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 1$$
$$2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$$

Additives System:

Zahlenwert eines Ziffernzeichens hängt nur von dessen Form ab.

MMCCXXII

$1000 + 1000 + 100 + 100 + 10 + 10 + 1 + 1$

„Position" kann nur festlegen,
ob der Wert addiert oder subtrahiert wird

IX = – 1 +10; XI = 10 + 1

Ziffer	griech. Alphabet-ziffern	kyrill. Alphabetziffern (altkirchen slawisch)	hebr. Alphabet-ziffern (Kabbala)	arab. Neshi-Alphabet-ziffern ≠ Alphabet-Folge	ostarab. Ziffern
0					٠
1	Α	а	א alef	ا alif	١
2	Β	в	ב beth	ب bā	٢
3	Γ	г	ג gimel	ج ǧīm	٣
4	Δ	д	ד daleth	د dāl	٤ ۴
5	Ε	е	ה he	ه hā	٥ ۵
6	ς (στίγμα, digamma)	s [dz]	ו waw	و waw	٦ ۶
7	Ζ	з	ז zajin	ز zāį	٧
8	Η	и	ח chet	ح ḫā	٨
9	Θ	ѳ	ט tet	ط ṭā	٩
10	Ι	і	י jod	ى įā	

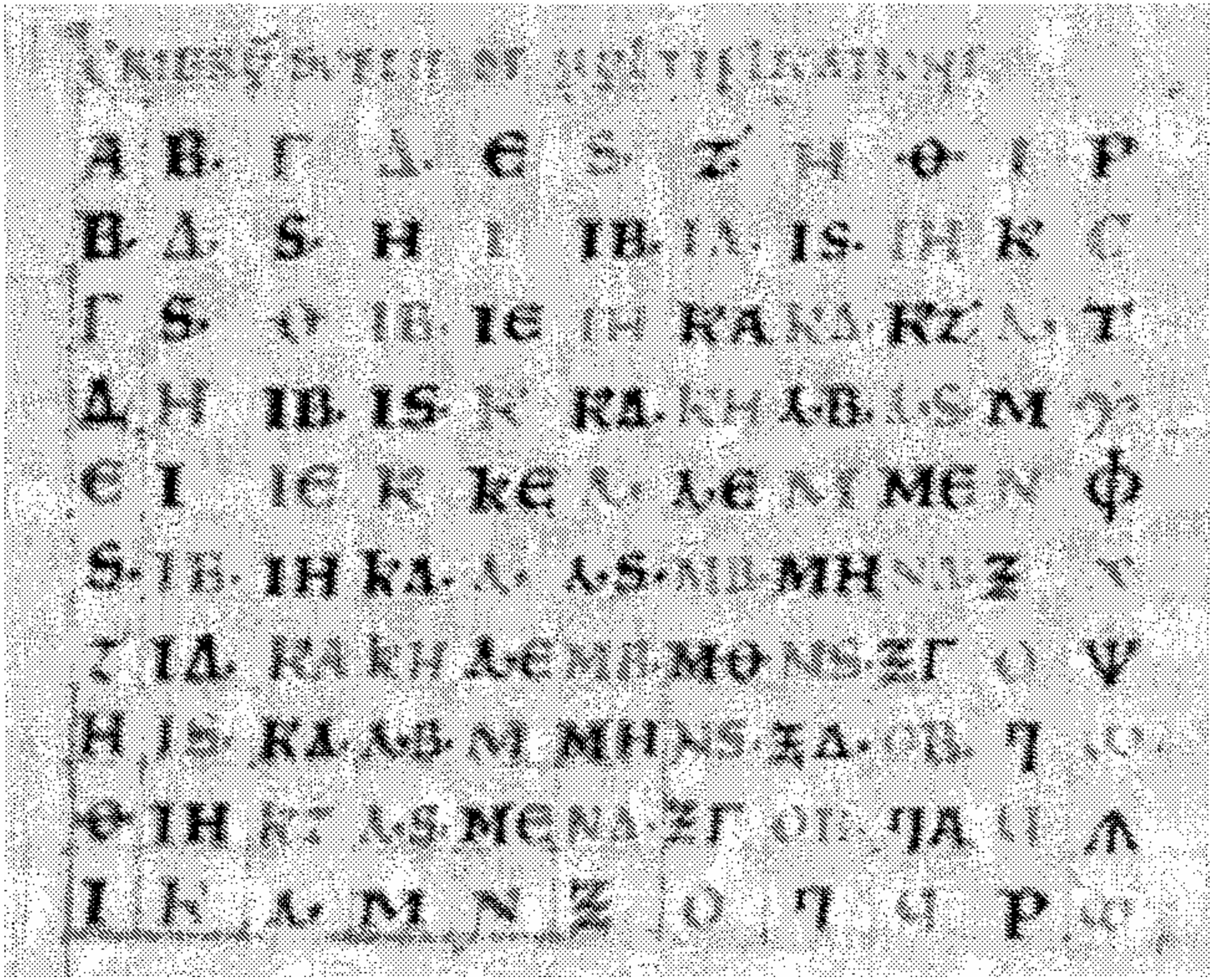
Ziffer	griech. Alphabet-ziffern	kyrill. Alphabetziffern (altkirchenslawisch)	hebr. Alphabetziffern (Kabbala)	arab. Nes<u>h</u>i-Alphabet-ziffern ≠ Alphabet-Folge	ostarab. Ziffern
10	Ι	ı	י jod	ى i̯ā	
20	Κ	к	כ kaph	ك kāf	
30	Λ	л	ל lamed	ل lām	
40	Μ	м	מ mem	م mīm	
50	Ν	н	נ nun	ن nūn	
60	Ξ	З	ס samech	س sīn	
70	Ο	о	ע ʿajin	ع ʿain	
80	Π	п	פ pe	ف fā	
90	ϙ κόππα	ч	צ şade	ص ṣād	
100	Ρ	р	ק qoph	ق ķāf	
200	Σ	с	ר resch	ر rā	
300	Τ	т	ש s(ch)in	ش šīn	
400	Υ	оу	ת taw	ت tā	
500	Φ	ф	תק	ث ṯā [θ]	
600	Χ	х		خ ẖā [χ]	
700	Ψ	ψ		ذ ḏāl [đ]	
800	Ω	ω		ض d'ād	
900	ϡ σανπῖ	ц	תתק	ظ zā	
1000	’Α	,а	'א	غ ġain	

1. Zahldarstellung

Cribrum Boethii de multiplicatione

Multiplikationstafel
im additiven System der
griechischen Buchstabenzahlen

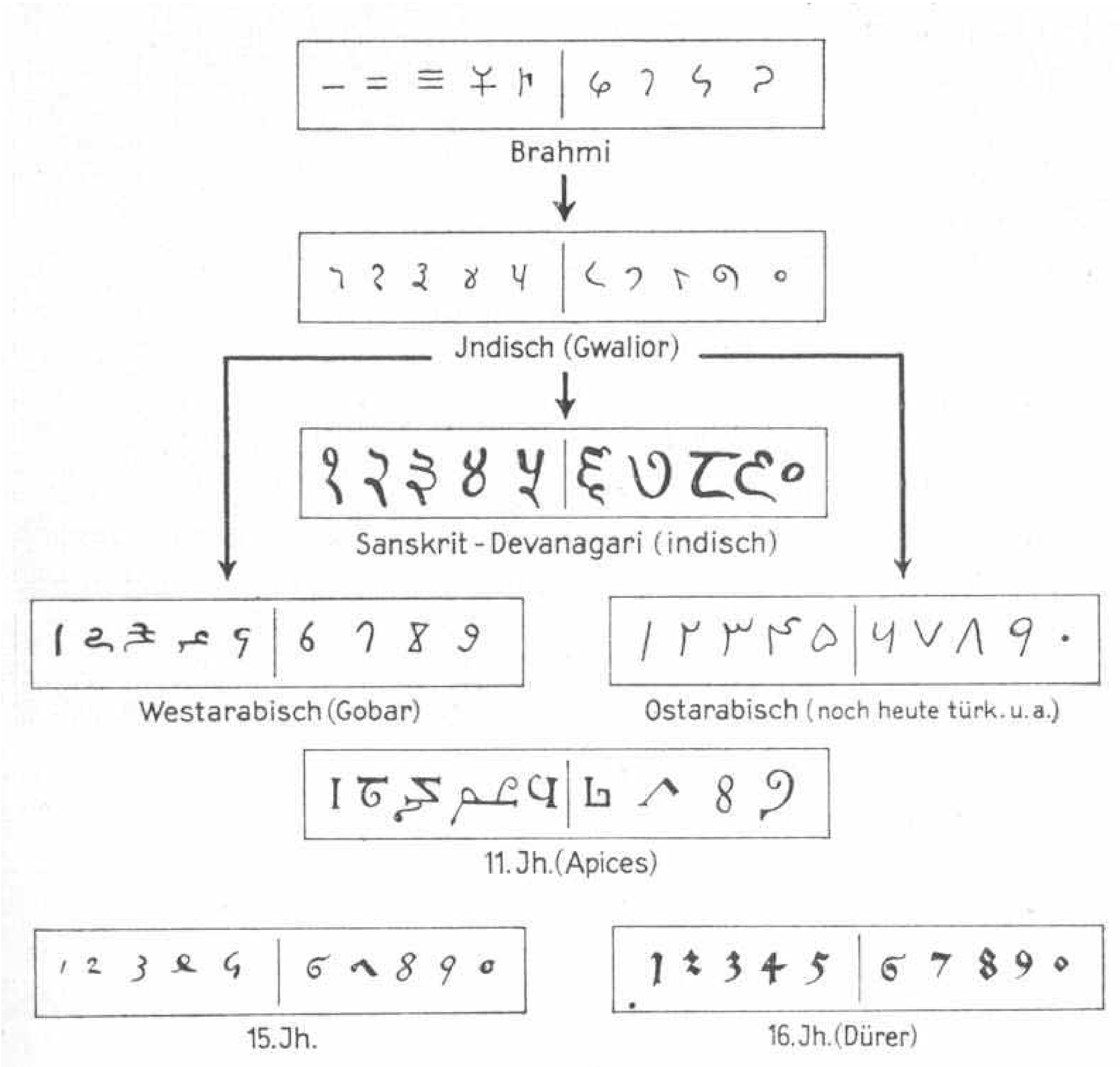
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	200
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	300
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	400
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	500
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	600
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	700
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	800
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	900
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	1000



(Evans 1977, 26-27: Oxford, St. John's College MS 17, 56v)

2. Arab. Zahlen – Ursprung

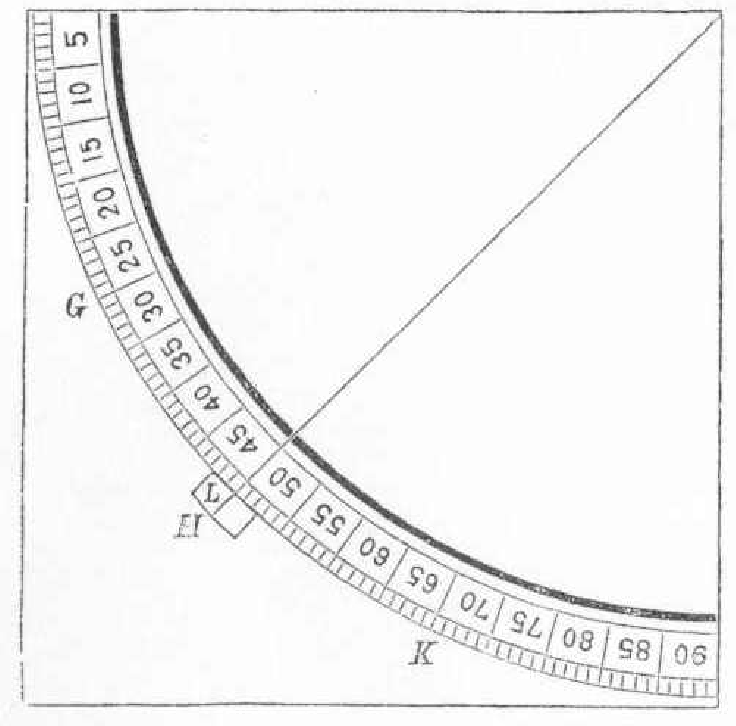
Stammbaum
der arabischen Ziffern



(Menninger, Kulturgeschichte der Zahlen, 1934, 329)

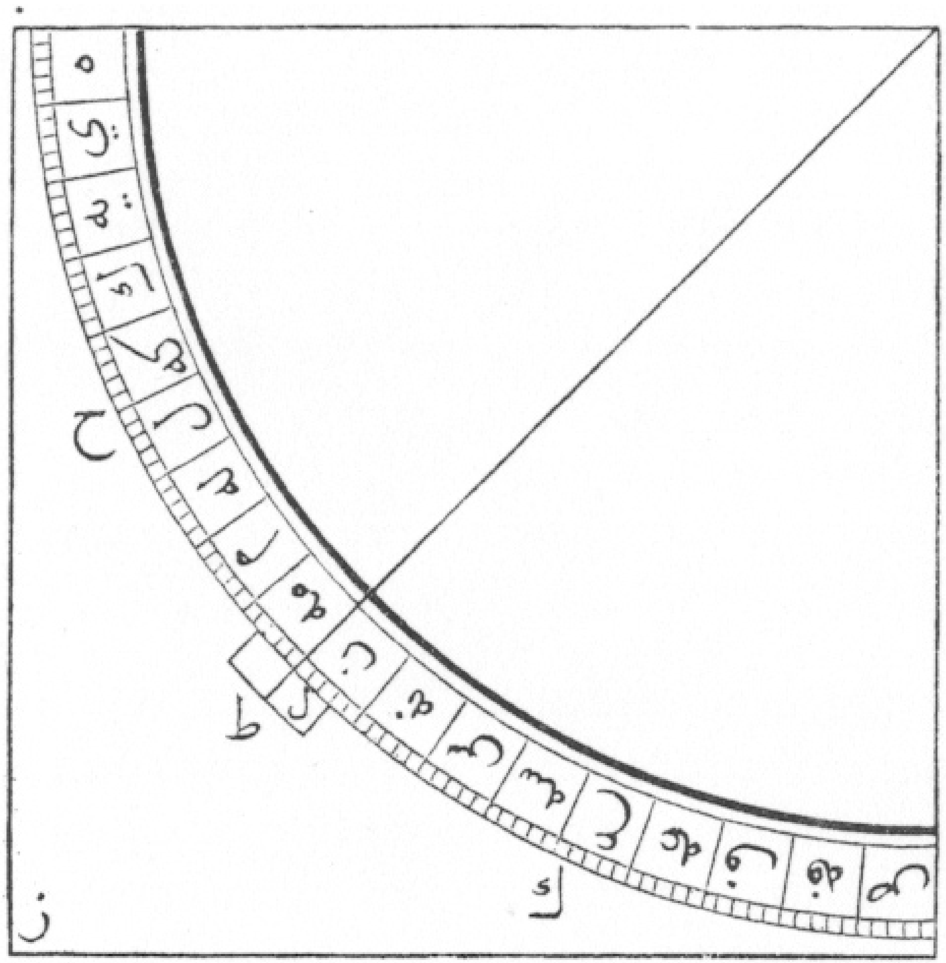
2. Arab. Zahlen – Ausbreitung

Al-Battani (~858 - 929)
Kitab al-Zidsch
Opus astronomicum
übersetzt von Plato von Tivoli



(ed. Nallino, Carlo Alfonso, 1899-1903, I 142, III 214)

Quadrans murale: N-S-orientiert
zur Messung des Sonnenhöchststandes
(G Wintersolstitien, K Sommersolstitien)



2. Arab. Zahlen – Ausbreitung

Kalifen mit Beginn der Hedschra-Zeitrechnung am 1. Muharram des Jahres 1 der Hedschra Fr 16.07.622 bzw. Do 15.07.622 (astronomisch)

Al-Battani (~858 - 929)
Kitab al-Zidsch
Opus astronomicum

جدول تاريخ الخلفاء من لدن هجرة النبي صلّى الله عليه وسلّم

Chronologia khalifarum a secessione Prophetae, cui Deus propitius est et salutem praestat.

اسماء الخلفاء الراشدين من لدن الهجرة على ان اول يوم من المحرّم الجمعة والذي يُعمَل عليه في التاريخ الخميس وهذا المحرّم لاوّل سنة الهجرة Nomina khalifarum iustorum a secessione (*hiğrah*), cum dies Veneris ponatur primus dies mensis muharram. Sed in chronologia [astronomorum] a die Iovis incipitur. Pertinet hic muharram ad primum hegirae annum.	ما ملك كل واحد منهم Quot quisque eorum regnaverit tempus.			مجموعة السنين Annorum summa.		
	سنون Anni.	شهور Menses.	ايام Dies.	سنون Anni.	شهور Menses.	ايام Dies.
Fuit secessio Prophetae cui est aeterna salus, ab urbe Mekkah ad al-Medīnah primo anno.	0	2	8	0	2	8
Mansitque secedens al-Medīnah in urbe ad mortem usque.	9	11	22	10	2	0
Abū Bakr ibn Abī Quhāfah e [tribu] Banū Taym.	2	3	8	12	5	8
ʻOmar ibn al-Khaṭṭāb e [tribu] Banū ʻAdī.	10	6	17	22	11	25
Et fuit deliberatio post ʻOmar ibn al-Khaṭṭāb.	0	0	3	22	11	28
ʻOthmān ibn ʻAffān ex Banū Umayyah.	11	11	19	34	11	17
ʻAlī ibn Abī Ṭālib et seditio.	4	9	0	39	8	17

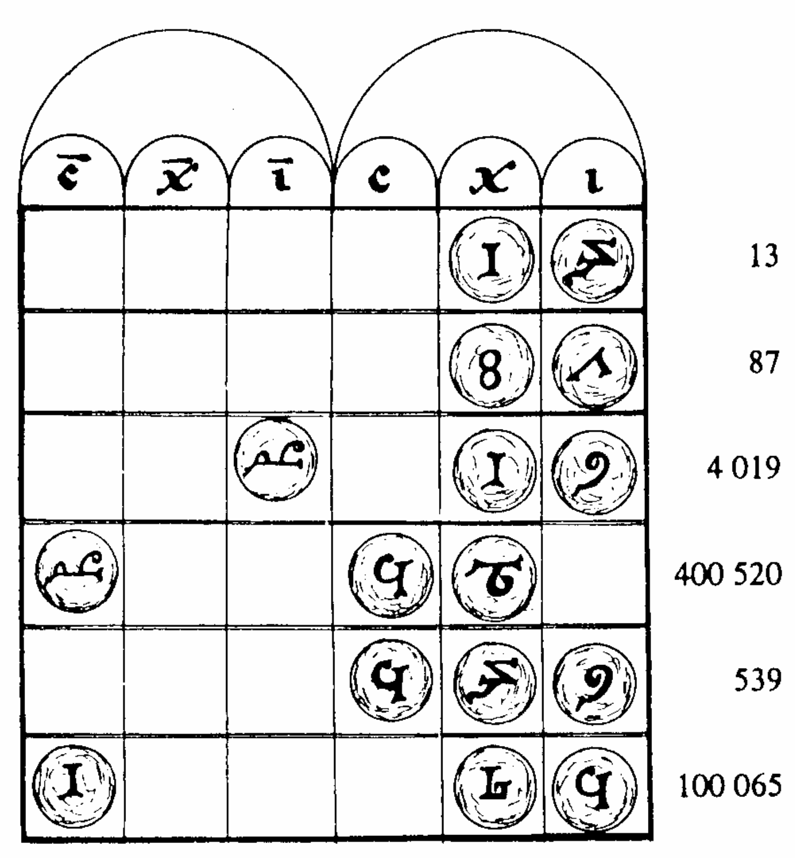
(ed. Nallino, Carlo Alfonso, 1899-1903, I 4, III 231)

جَدْوَل[2] تأريخ الخُلَفاء من لَدُنِ الهِجْرة هجرة النبيّ صلّى الله عليه وسلّم

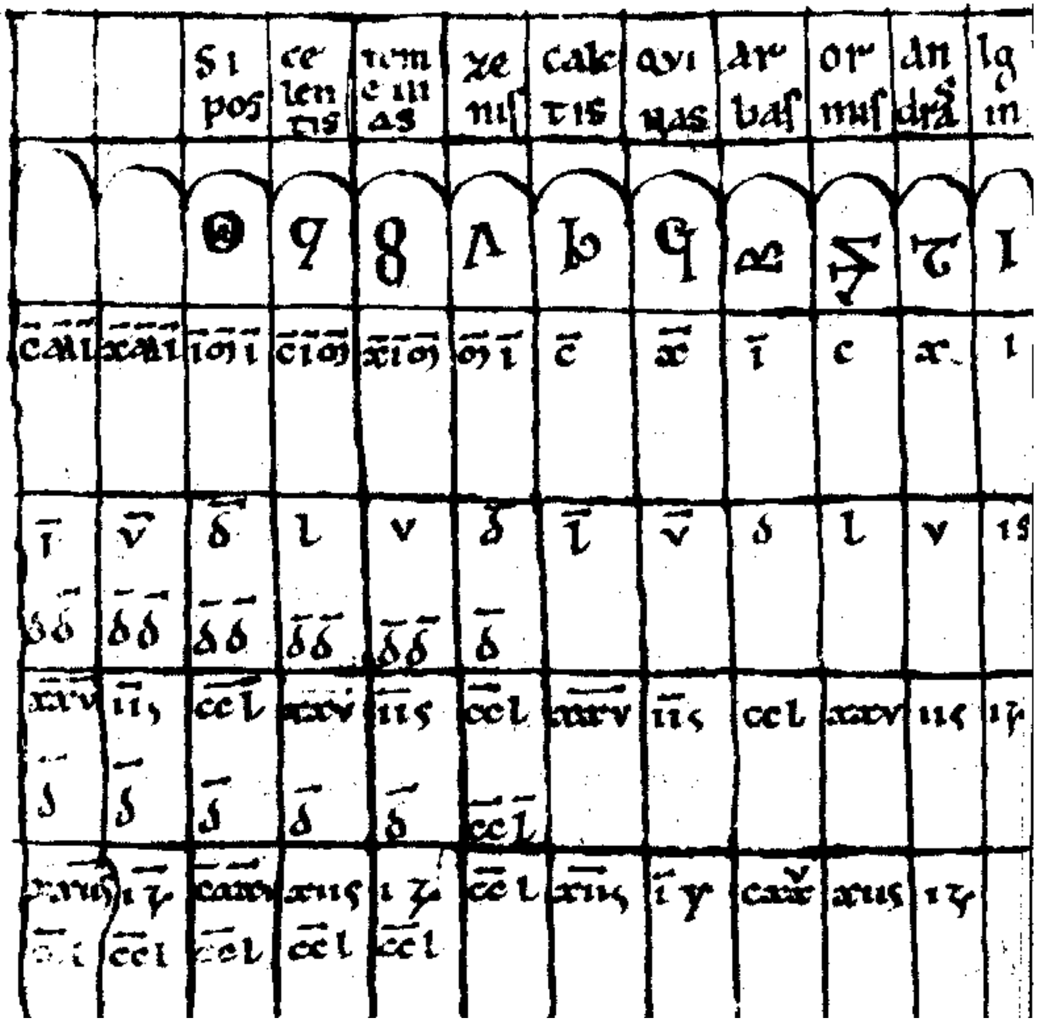
مجموعة السنين			ما ملك كلّ واحد منهم			أسماء الخُلَفاء الراشدين من لدن الهجرة على أنّ اوّل يوم من المحرّم الجُمعة والذي يُعمَل عليه في التأريخ الخميس وهذا المحرّم لاوّل سنة الهجرة
ايام	شهور	سنون	ايام	شهور	سنون	
ح	ب	ه	ح	ب	ه	كانت هِجرة النبيّ محمّد صلّى الله عليه وسلّم من مَكّة الى المدينة سنة احدى لها
ه	ب	ى	كب	يا	ط	فمكث مُهاجرًا بالمدينة حتّى قُبِض
ح	د	يب	ح	ج	ب	ابو بكر بن ابي قُحافة من بني تيم
كه	يا	كب	يز	و	ى	عُمر بن الخَطّاب من بني عَدِيّ
كح	يا	كب	ج	ه	ه	وكانت الشُّورى بعد عمر بن الخطّاب
يز	يا	لد	يط	يا	يا	عُثمان بن عَفّان من بني أُميّة
يو	ح	لط	ه	ط	د	عَلِيّ بن ابي طالِب والفِتْنة

2. Arab. Zahlen – Ausbreitung

Zwei Abakus-Typen!



Gerberts Klosterabakus (~1000)
(Ifrah, Universalgesch. Zahlen, 1991, 532)



„Boethius“ Geometrie II
(Folkerts, 1970, Tafel 5)
(Berlin, lat. 8° 162, 73v, 10. Jh.)

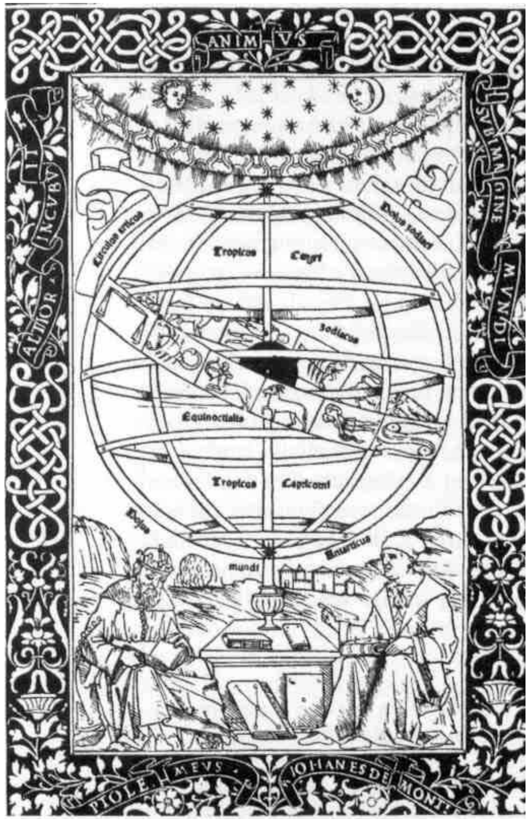
2. Arab. Zahlen – Ausbreitung

(Gregor Reisch:
Margarita Philosophica, 1503)

Arithmetica (1 2 4 8, 1 3 9 27)
Boethius Algorist, Pythagoras Abacist (1241, 82)

2. Arab. Zahlen – Ausbreitung

Noch 1299 Gebrauch
der neuen Ziffern
den Kaufleuten in Florenz
verboten (Fälschungsgefahr)
(Nagl 1889, 162)



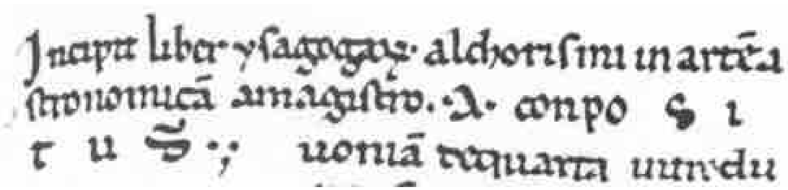
Das jahrhundertelange
Nebeneinander
von arab. und röm. Zahlen
endet erst in der Zeit
von Regiomontan
(1436-1476)
(Epitome in Ptolemaei almagestum,
Venedig 1496, Trinity College Cambridge)

Rechenbücher 2. Hälfte 15. Jh.
Algorismus Ratisbonensis 1463

2. Arab. Zahlen – Ausbreitung

Anleitungen zum Rechnen
mit arab. Zahlen erscheinen
oft als erster Teil einer
Einführung ins Quadrivium
oder in die Astronomie

Denn:
arab. Zahlen Voraussetzung
für astronom. Tafeln



(Bibl. Nat. Paris, Lat. 16208, 67r)

Mohammed ben Mūsā al-Khwarizmi (~780-~850)
Perser aus Khwârazm / Khorasmia
am Unterlauf des Amu-Darya (Aral-See)
latinisiert Algorismus

Liber ysagogarum (Einführung ins Quadrivium)
übersetzt von Adelhard von Bath (aktiv 1116-1142)
arab. nicht erhalten, nur in lat. Übersetzungen
Algorismus =
Anleitung zum Rechnen mit arab. Zahlen
Einführung der 0 aus der indischen Mathematik

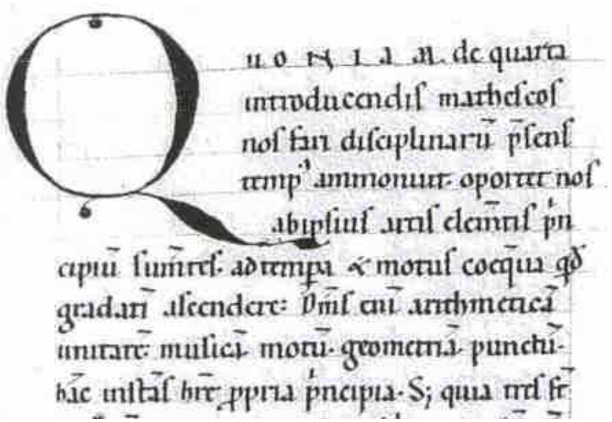
Astronomische Tafeln übers. von Adelhard 1126

Al-Jabr wal-muqâbalah 'Algebra' (820)
Buch über quadratische Gleichungen
übersetzt von Gerhard von Cremona, Plato von
Tivoli und Robert von Chester (1145)

3. Astronomische Tafeln

Clm 13021
Kloster Prüfening, ~1165

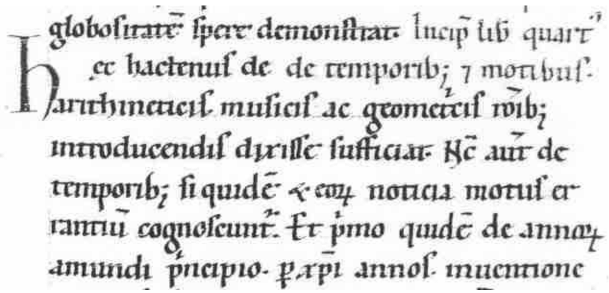
Im Anschluss an den
Liber ysagogarum Alchorismi
des **al-Khwarizmi**
(ed. Vogel 1963, Allard 1992)



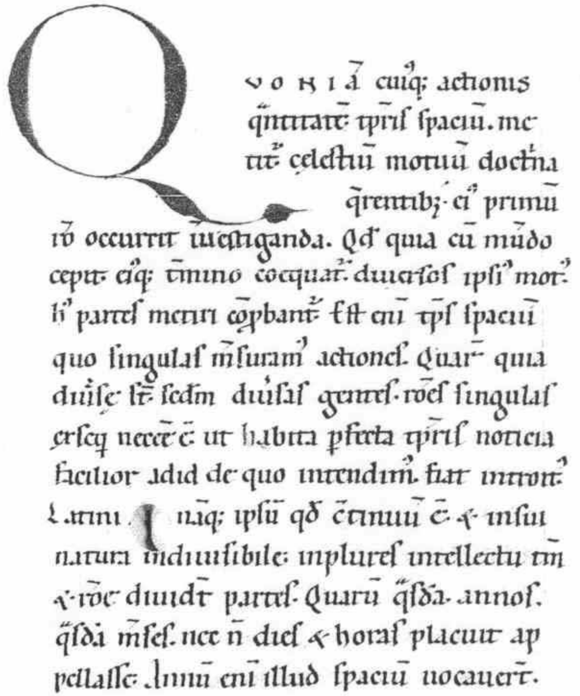
(Clm 13021, 27r)

Einführung in die Astronomie,
Tabellen mit *Canones* (Benutzungsanleitung)
in Anlehnung an **al-Zarqali**s (~1030-~1090)
Tafeln von Toledo (*Tabulae Toletanae*)
übersetzt von Gerhard von Cremona (1114-1187)
(ed. Millás Vallicrosa 1943-1950)

4. Buch al-Khwarizmis:
Astronomie



(Clm 13021, 30r)



(Clm 13021, 31v)

3. Astronomische Tafeln

Exzentrische Bahn der Sonne

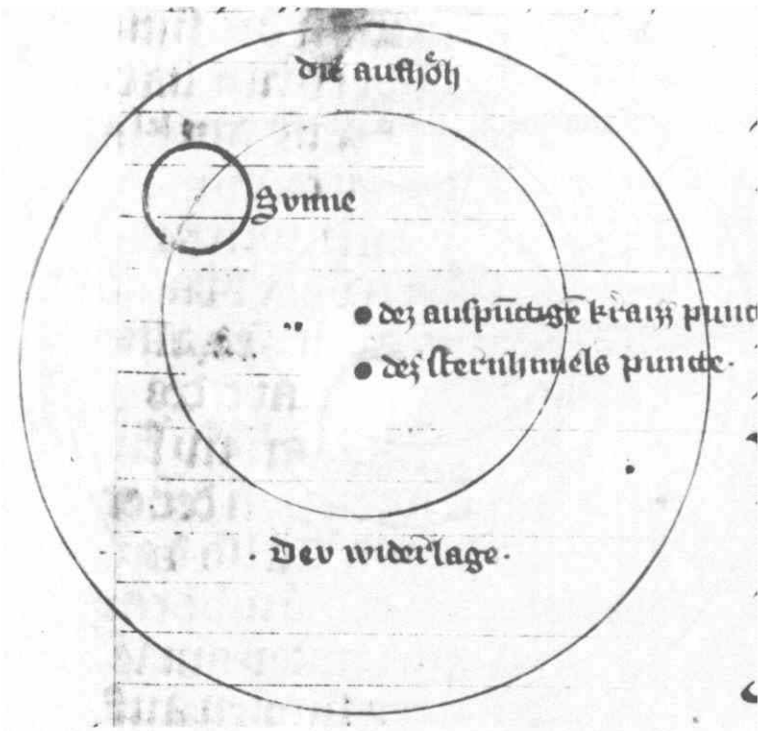
ω sublimatio; aux propria

μ medialitas, medius cursus / motus; el-wazat

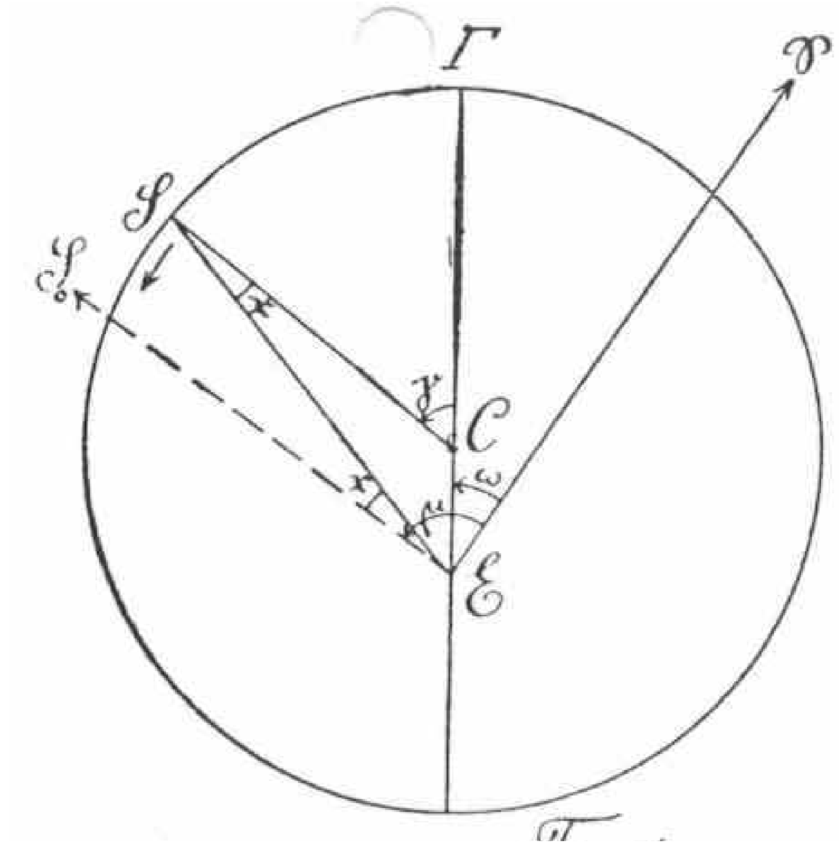
$\gamma = \mu\text{-}\omega$ argumentum; el-heza

x aequatio, examen; tadil (mit γ in Tabelle)

$l = \mu{+}x$ (x neg.) ekliptikale Länge der Sonne



(Deutsche Sphaera, Cgm 156, 28r
aus Brévart 1980, 161)



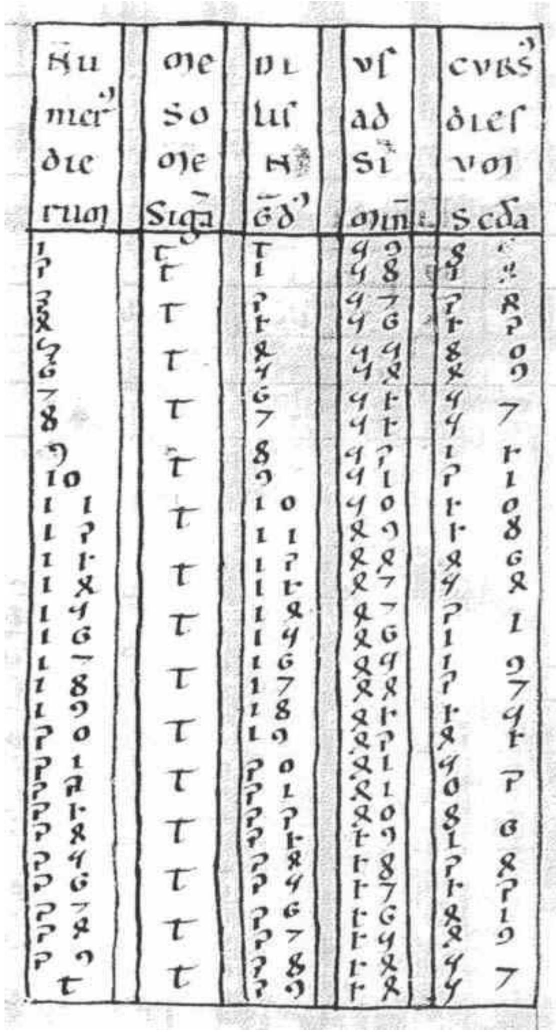
(Wegener, Alfonsinische Tafeln, 1905, Fig. 1)

3. Astronomische Tafeln

Mittlere Bewegung der Sonne nach Tagen (**medialitas** solis)

Tabuliert sind:

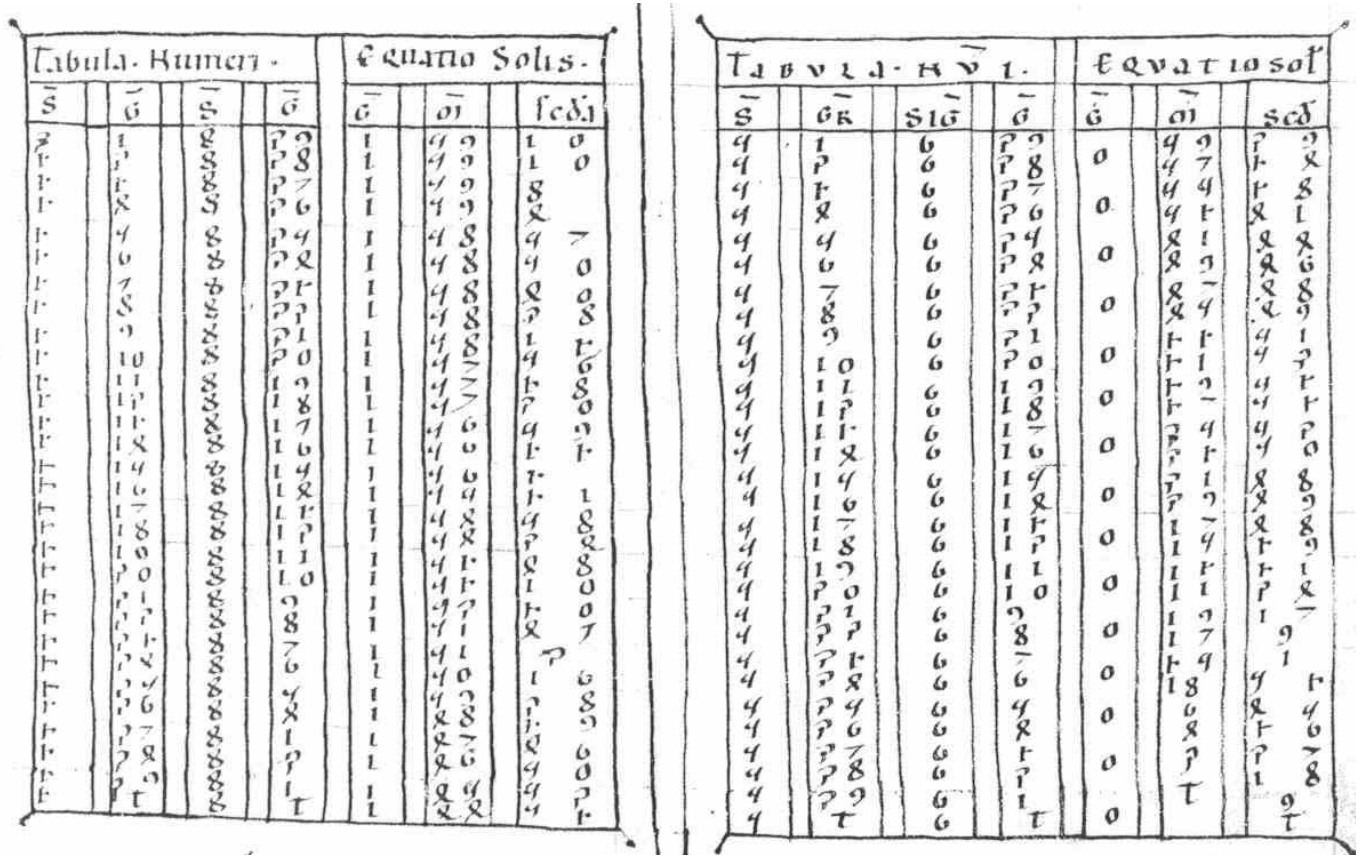
numerus dierum
numerus horarum / minutarum
μ **medius cursus** solis ad dies mensium etc.
in signa (30°), gradus, minuta und secunda



(Clm 13021, 34r)

konstanter Winkel pro Tag: 59' 8-9"
wird korrigiert durch die aequatio solis

3. Astronomische Tafeln



(Clm 13021, 35r)

Ausgleichswerte der Sonne (**aequatio** solis)

Tabuliert sind:

γ argumentum; el-heza
x **aequatio**, examinatio; tadil

beide in signa (30°), gradus, minuta und secunda

$$x(180° - \gamma) = x(180° + \gamma)$$

x minimal (0° 0' 0") für γ = 180° (6 signa, 0°)
x maximal (1° 59' 10") für γ = 90° 1' (3 signa 1')

Alfred Holl

Die arithmetischen Algorithmen im Algorismus von al-Khwarizmis *Liber ysagogarum* Die Regensburg-Prüfeninger Fassung einer mittelalterlichen Einführung in das Rechnen mit arabischen Zahlen

1. Grundlagen

700-800	Aufbau großräumiger interkultureller Kontakte	768 Kalifen in Bagdad (al-Mansur, al-Raschid): arab., syr., ind. Ärzte; Alkuin (Karl d. Gr.)
800-900	griech.-syr.-arabische Übersetzungen (syrische Christen), erste Rezeption im arabischen Kulturraum	813-833 al-Mamun erhält Handschriften aus Konstantinopel -873 Honein ben Ishak 780-850 al-Khwarizmi
900-1000	Weiterdenken im arabischen Kulturraum; Kontakte zum christlich-römischen Europa	945-1003 Gerbert v. Aurillac *Regula de abaco computi, De numerorum divisione*
1000-1100	Weiterdenken im arabischen Kulturraum; Rezeption lateinischer Quellen (Boethius) im christlich-römischen Europa	Avicenna, al-Ghazzali al-Biruni (Astronomie) Alhazen (Optik); Hermannus Contractus Otloh von St. Emmeram Wilhelm von Hirsau
1100-1200	arab.-lat. Übersetzungen griechischer Quellen im islamischen Westen; Rezeption im christlich-römischen Europa; islamischer Osten nicht aktiv (Kreuzzüge ab 1095)	-1142 Adelhard von Bath -1153 Joh. Hispalensis und Gundisalvo: *Liber algorismi* -1187 Gerhard von Cremona, Übersetzerschule von Toledo 1109 R-Prüfening gegründet 1163-1168 Clm 13021
1200-1300	Rezeption und Weiterdenken im christlichen Europa; islamischer Westen nicht aktiv (Reconquista: 1236 Cord., 1248 Sevilla) 1258 Mongolen > Bagdad	-1240 Leonardo Fibonacci: 1202 *Liber abaci* -1240 Alexandre de Villa Dei: *Carmen de Algorismo* -1256 Joh. v. Sacrobosco: *Algorismus vulgaris*

1.1 Algorismus-Traktate des 12. und 13. Jh.

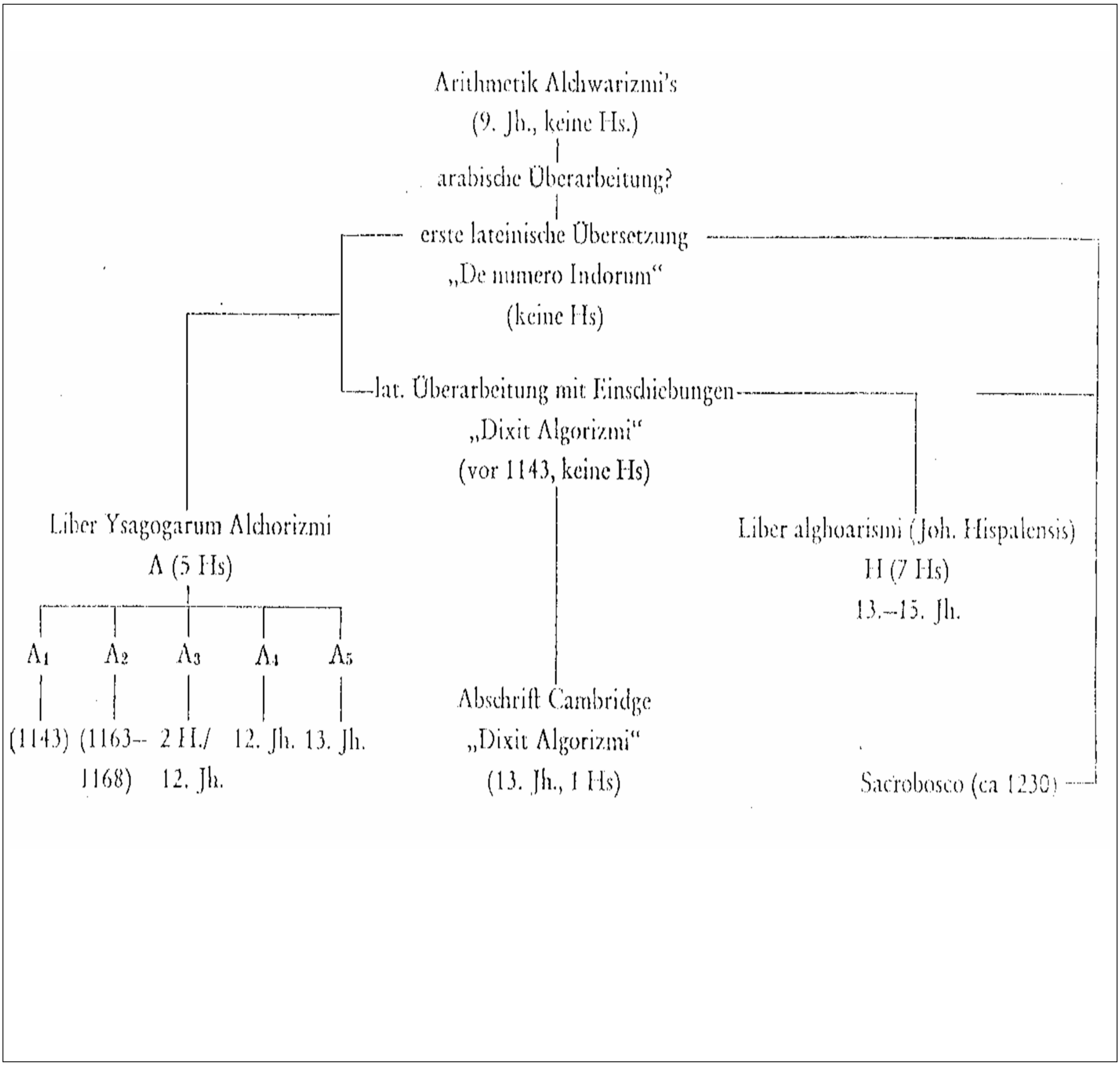


Abb. 1: Überlieferung von Algorismus-Traktaten

A1 Wien, Cod. Vind. 275; Süddt., später Reichenbach
A2 München, Clm 13021; Regensburg-Prüfening
A3 Paris, Cod.Paris. lat. 16208; Südfr. oder Bologna (?)
A4 Mailand, Cod. Ambr. A 3 sup.; ?
A5 München, Clm 18927; Tegernsee
(Vogel, Alchwarizmis Algorismus, 1963: 44)

1.1 Algorismus-Traktate des 12. und 13. Jh.

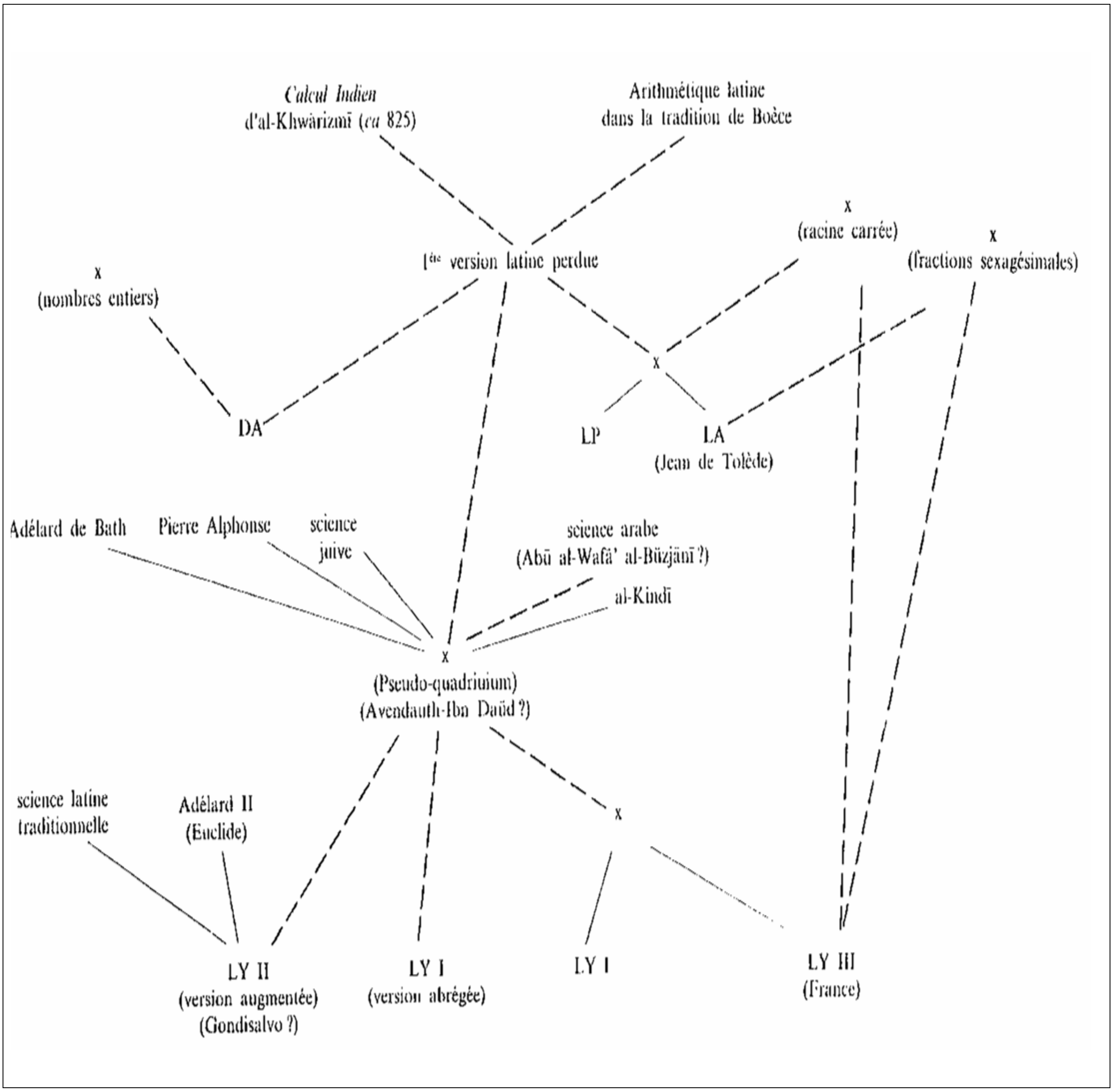


Abb. 2: Überlieferung von Algorismus-Traktaten
DA Dixit Algorizmi
LP Liber pulveris
LA Liber Alchorismi (Joh. Hisp.)
LY Liber ysagogarum
LY (I): Cod. Vind. 275
LY I: Clm 13021
LY II: Cod. Paris. lat. 16208 (Mag. A)
LY III: Clm 18927
(Allard, Le calcul indien, 1992: XXVII)

1.2 Ziffernformen

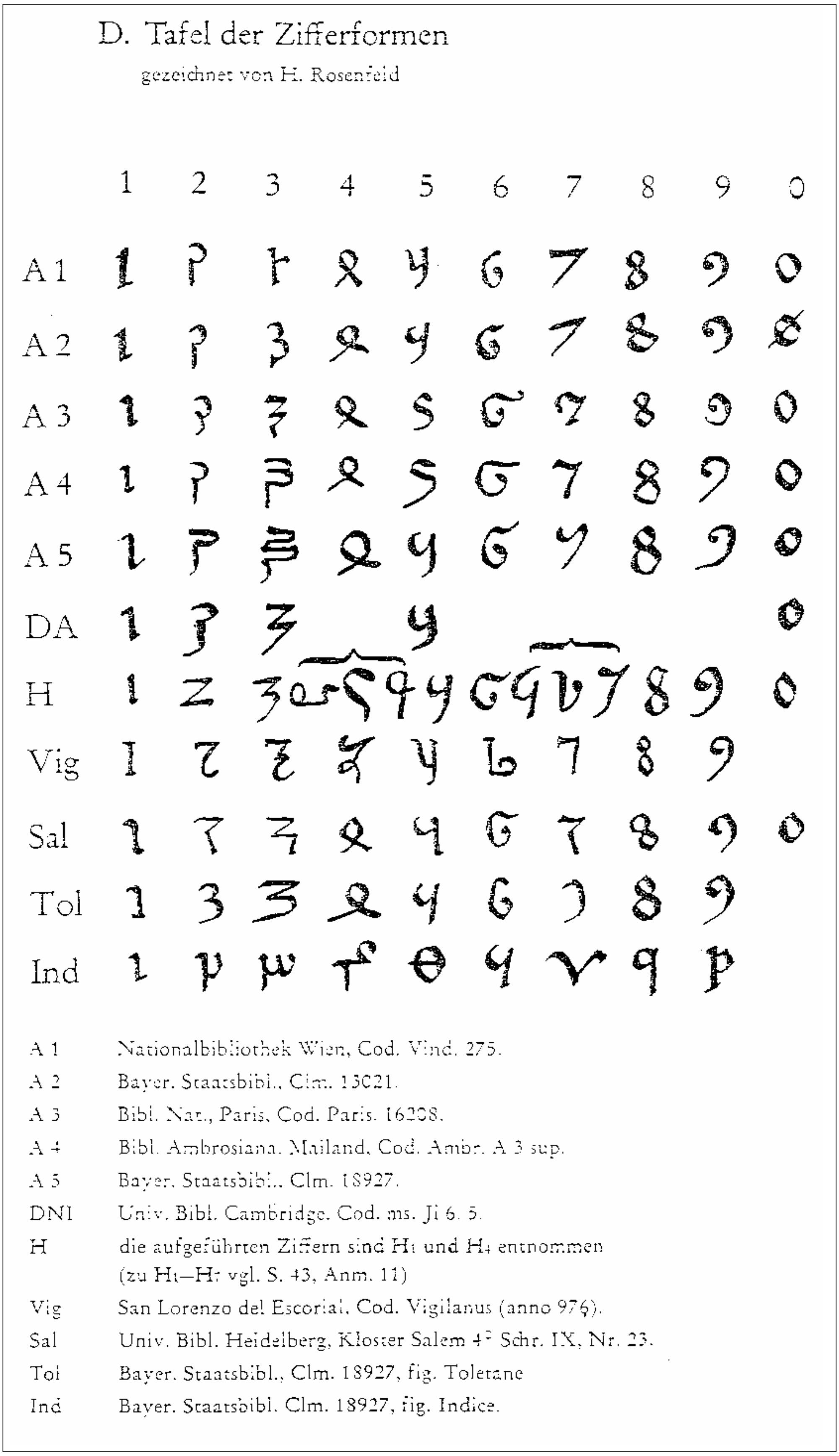


Abb. 3: Ziffernformen (Vogel, Alchwarizmis Algorismus, 1963: 51)

1.2 Ziffernformen

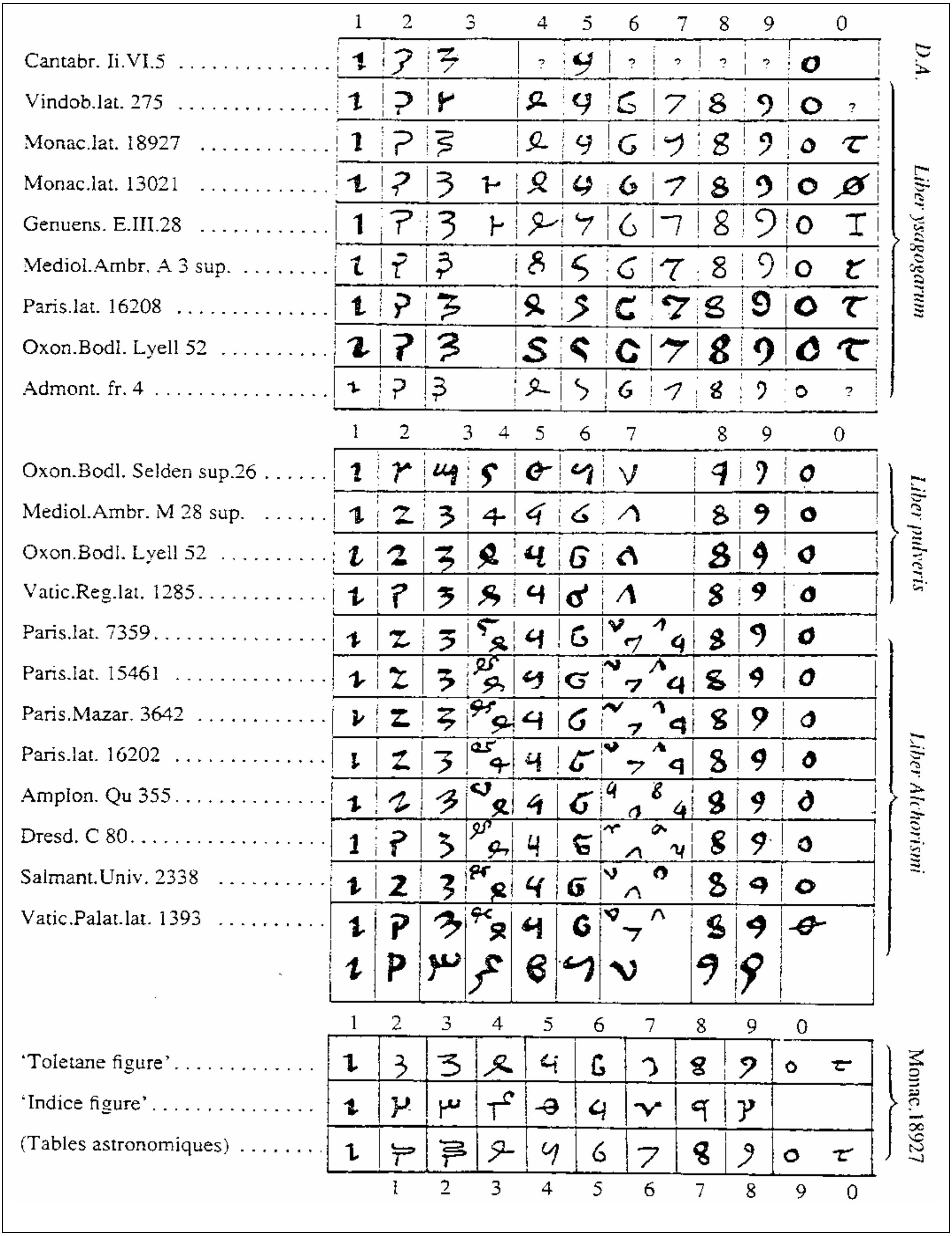


Abb. 4: Ziffernformen
(Allard, Le calcul indien, 1992: 252)

1.3 Aufbau des Algorismus im *Liber ysagogarum* des Clm 13021

1. Ganze Zahlen – de integris numeris: 27ra-28ra

de multiplicatione primae speciei [1-9: digiti]
de multiplicatione secundae speciei [durch 10 teilbar: articuli]
de multiplicatione tertiae speciei [beliebige Zahlen: compositi]
de probatione multiplicationis
de additione
de diminutione integrorum
de mediatione integrorum
de duplicatione
de probatione duplicationis
de divisione integrorum
de probatione divisionis

2. Brüche – de minutiarum notis: 28ra-28vb

de multiplicatione minutiarum [Sexagesimalbrüche]
de multiplicatione integrorum per minutias
de divisione minutiarum
de constitutione integrorum et minutiarum [Darstellung]
de additione minutiarum
de diminutione minutiarum
de duplicatione et mediatione minutiarum
de multiplicatione minutiarum diversorum generum [Brüche mit beliebigen Nennern]
de multiplicatione integrorum et minutiarum div. generum
de divisione minutiarum diversorum generum

3. Quadratwurzeln – de inventione radicis: 29ra-29va

de inventione radicis integrorum
de inventione radicis minutiarum
de inventione radicis integrorum et minutiarum div. ordinum
Item alia regula de inventione radicis

2. Ganze Zahlen – Terminologie

Ziffer	***figura***
Null	***ciffra, circulus, ni(c)hil***
Zahldarstellung mit Ziffern	***constitutio, descriptio, positio***
Ziffernfolge	***dispositio, ordo***
Stelle(nwert) einer Ziffer	***differentia, denominatio***
ganze Zahl	***numerus, integer (numerus)***
Eins	***gradus, unitas***
Zahlen 1 – 9	***digiti***
durch 10 teilbare Zahlen	***articuli***
aus *dig*. und *art*. zus.ges.	***compositi***

als Resultat ergeben	***efficere, fieri, generare***
als Resultat herauskommen	***evenire, excrescere, exire, nasci, occurrere, oriri, progredi, (con)surgere***
Resultat	***summa* (auch bei Multiplikation)**
Addition	***additio, augmentatio***
addieren	***addere, aggregare, colligere, congregare,copulare, numerare cum***
übertragen	***sublevare, transferre***
Subtraktion	***diminutio***
subtrahieren	***auferre, (decrescere,) demere, (di)minuere, semovere, sufferre***
Duplikation	***duplicatio, geminatio***
Halbierung	***mediatio***
Multiplikation	***collatio, multiplicatio***
multiplizieren	***conferre, ducere in/inter/per, multiplicare***
dividieren	***dividere in, partiri***
Divisionsrest	***nota, reliquum, reliquus (numerus), residuus (numerus), superfluus (numerus)***

2.1 Darstellung und Arten ganzer Zahlen

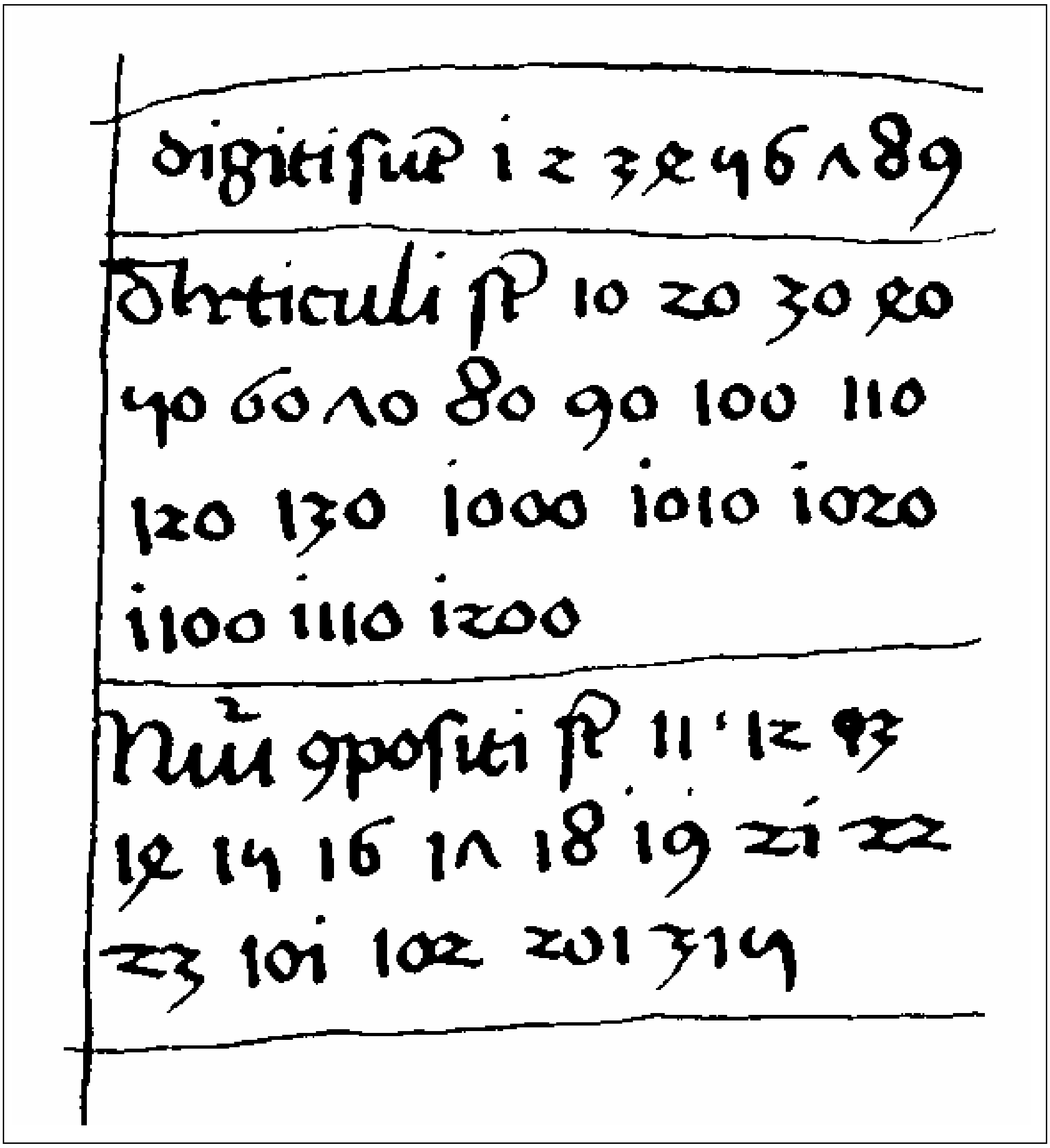


Abb. 5: ***digiti, articuli, compositi***
14. Jh. StaBiM (Menninger 1958: II 8)

2.1 Darstellung und Arten ganzer Zahlen

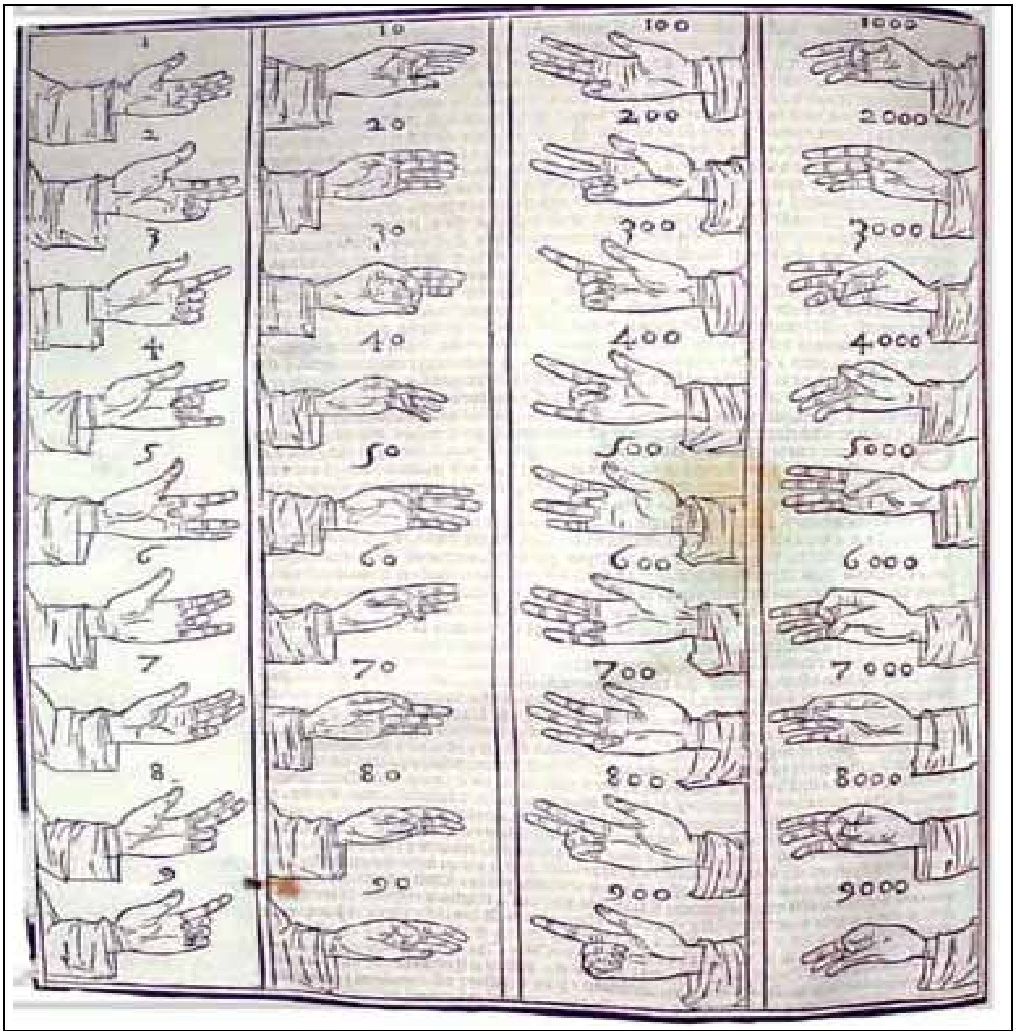
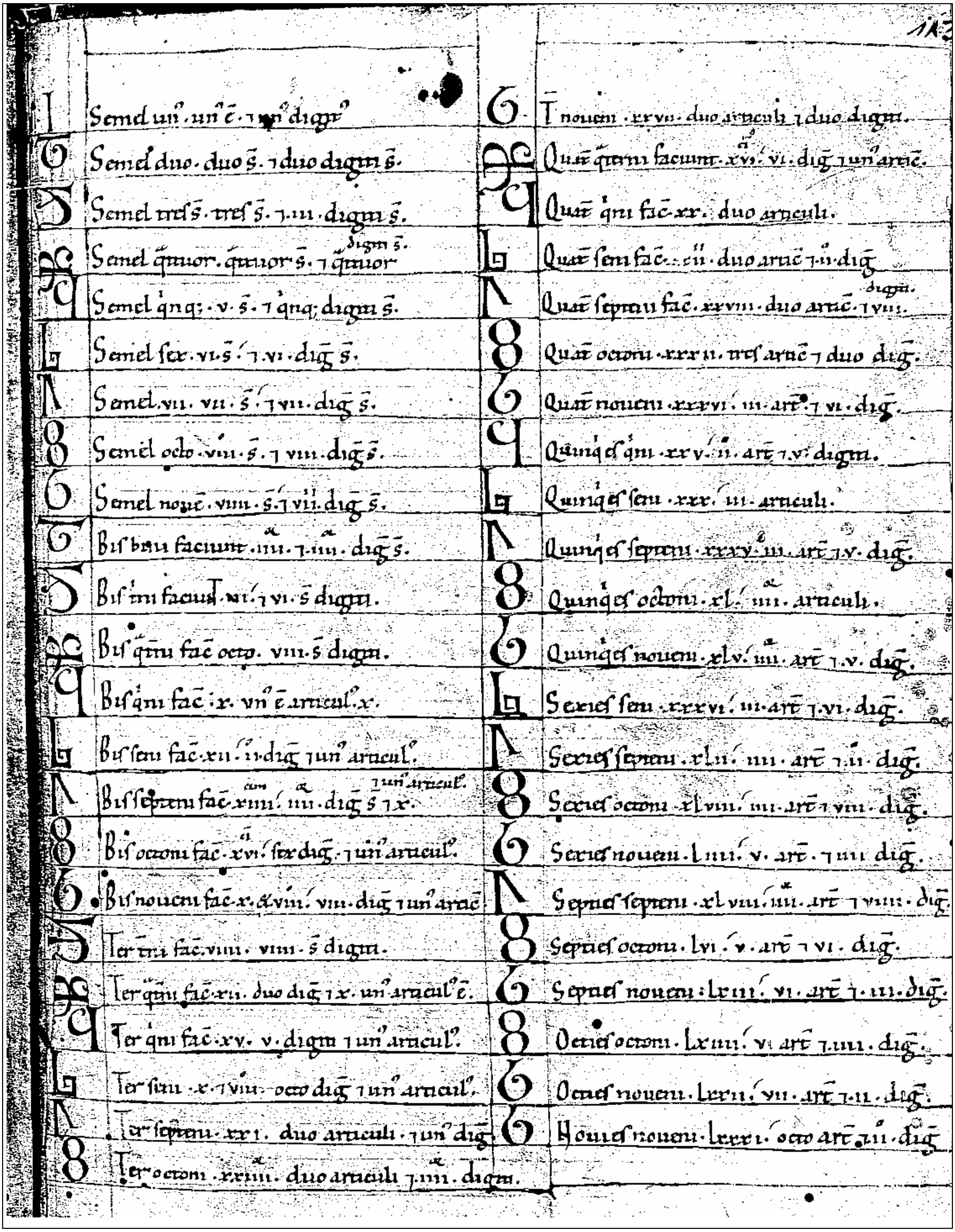


Abb.: Fingerzahlen des Beda Venerabilis (673-735)
(Luca Paciuoli, *Summa* 1494; Menninger 1934: 142)

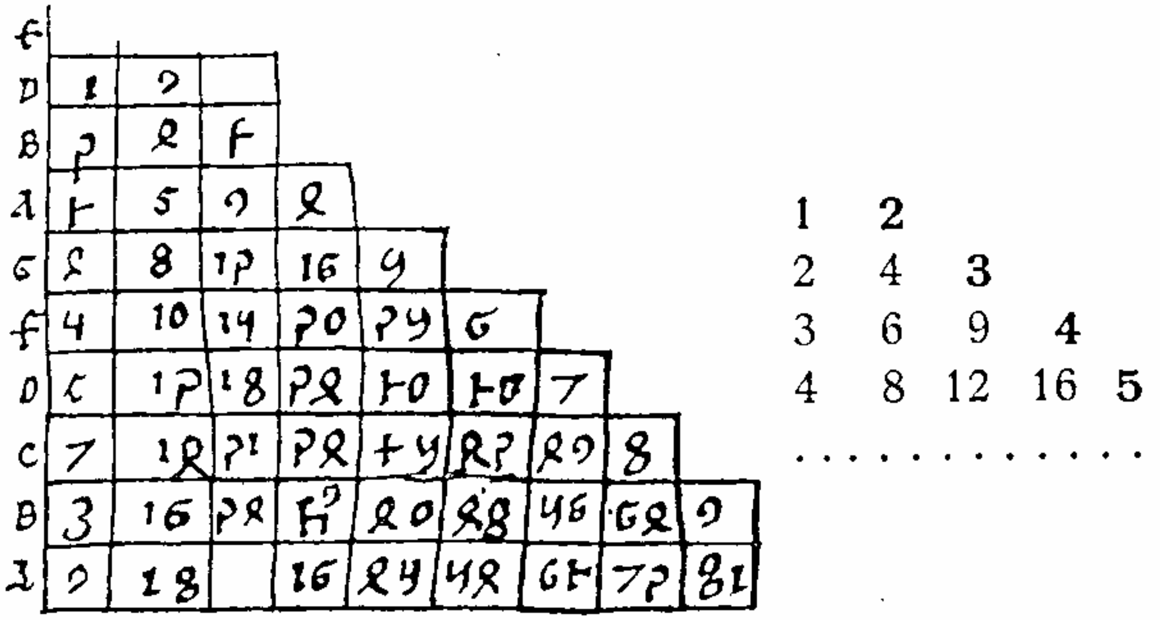
Grab Bedas in der Kathedrale von Durham

2.2 Multiplikation



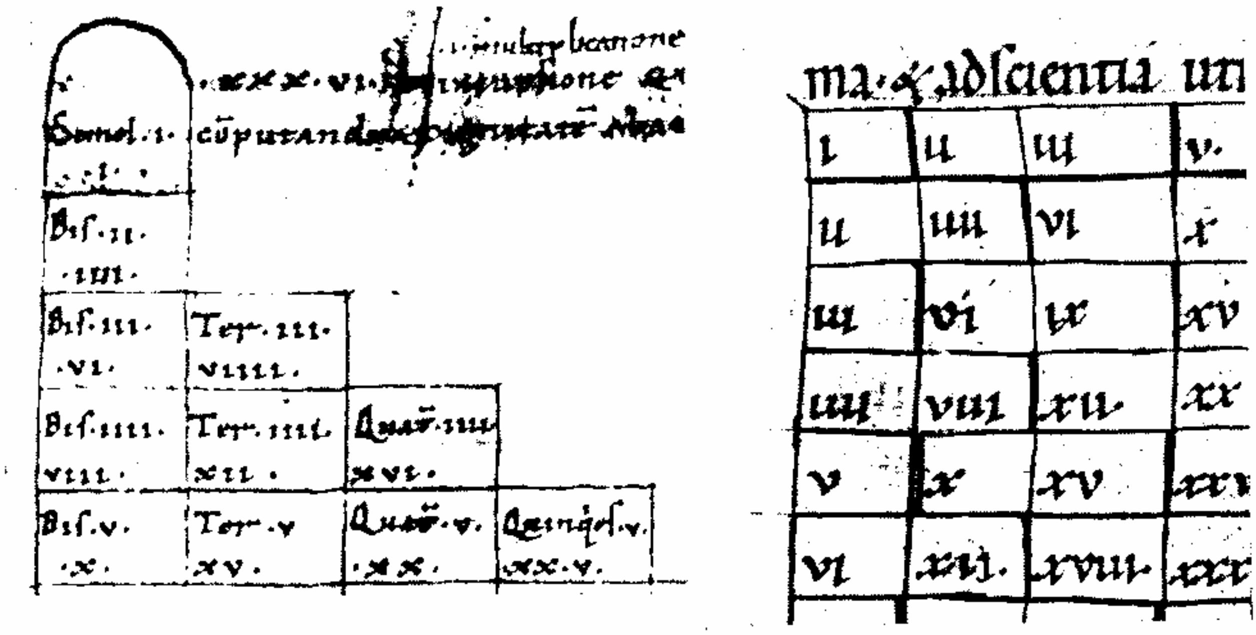
Menninger II 136: Clm 14137, 113r (Otloh von St. Emmeram)

2.2 Multiplikation



Eine Einmaleins-Tafel von 1 × 1 bis 9 × 9

aus einer der ältesten deutschen Algorismus-Handschriften. 12. Jahrhundert (Q 116).



Zwei Einmaleins-Tafeln (Anfang)

aus Klosterhandschriften des 13. Jahrhunderts.

Semel 1-, *bis* 2-, *ter* 3-mal usw. Beide noch ganz 'römisch'. Über der zweiten: „. . . et ad scientiam util(issima) . . ." — „und zur Wissenschaft äußerst nützlich . . ." Reizvoll ist der Vergleich mit Einmaleinstafeln anderer Zeiten und Völker (vgl. Sachweiser). Staatsbibliothek, München.

Menninger II 239 (1143 Cod. Vind. 275, 27r [Nagl 1889]) und 863

2.2 Multiplikation

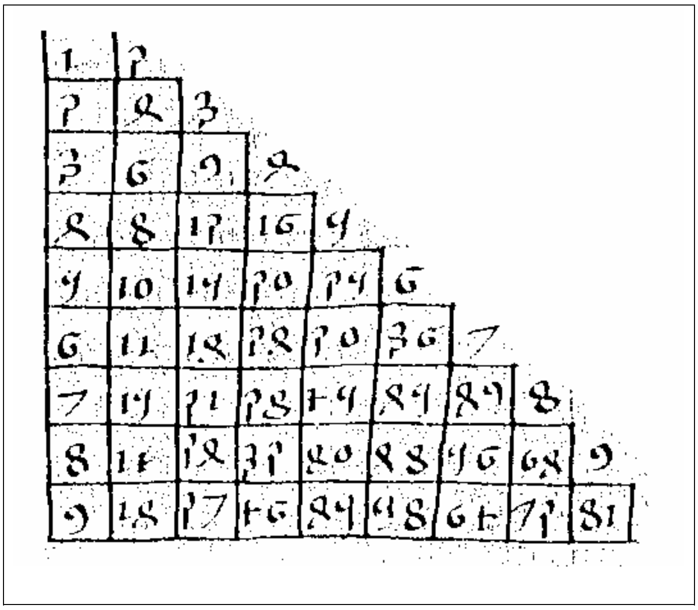
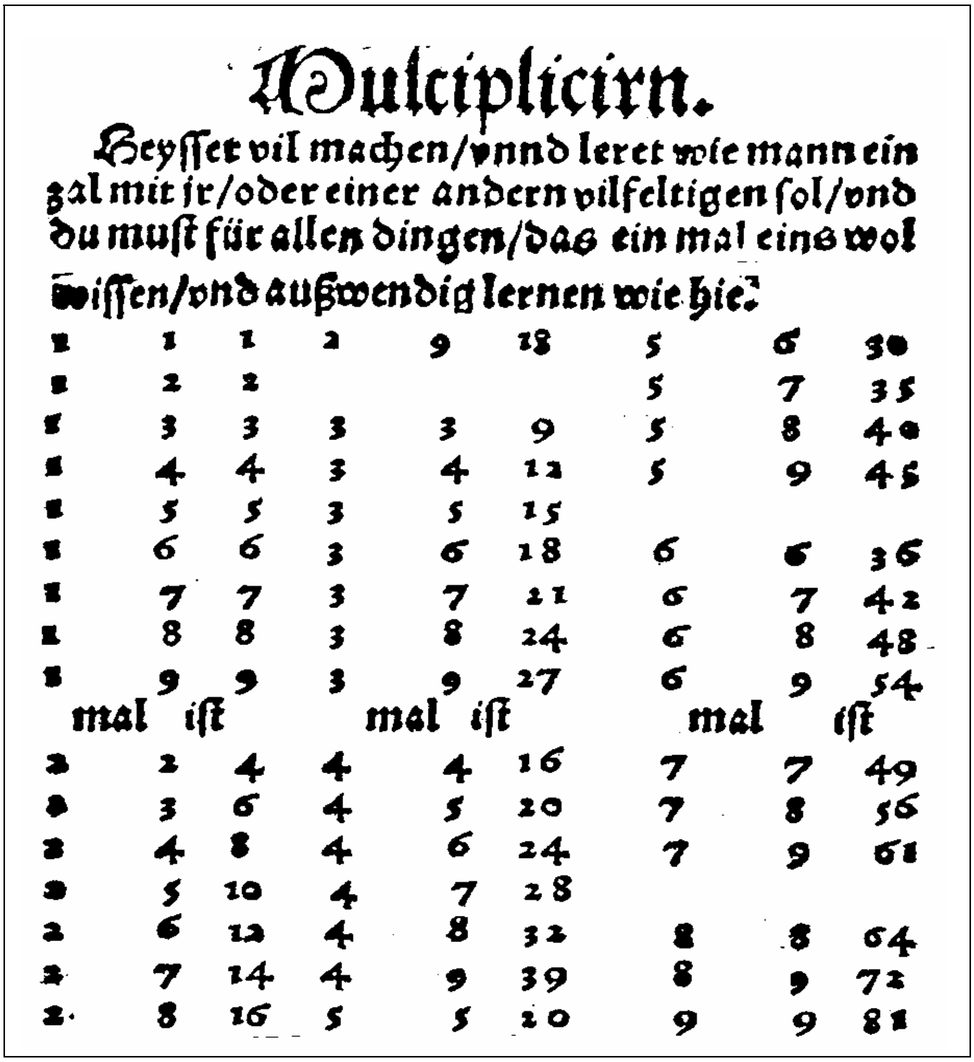


Abb. 6: Einmaleins-Tafel (Clm 13021, 27rb)



Multiplicirn.

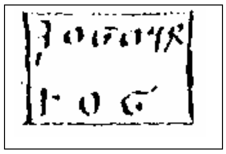
Heysset vil machen/vnnd leret wie mann ein zal mit jr/oder einer andern vilfeltigen sol/vnd du must für allen dingen/das ein mal eins wol wissen/vnd außwendig lernen wie hie.

1	1	1	2	9	18	5	6	30
1	2	2				5	7	35
1	3	3	3	3	9	5	8	40
1	4	4	3	4	12	5	9	45
1	5	5	3	5	15			
1	6	6	3	6	18	6	6	36
1	7	7	3	7	21	6	7	42
1	8	8	3	8	24	6	8	48
1	9	9	3	9	27	6	9	54
mal		ist	mal		ist	mal		ist
2	2	4	4	4	16	7	7	49
2	3	6	4	5	20	7	8	56
2	4	8	4	6	24	7	9	61
2	5	10	4	7	28			
2	6	12	4	8	32	8	8	64
2	7	14	4	9	39	8	9	72
2	8	16	5	5	20	9	9	81

Adam Ries 1525, 11-12

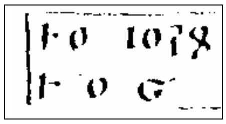
2.2.2 Multiplikation von *compositi*

multiplicans, -tor 1024
multiplicandus 306



1 · 306 = 306

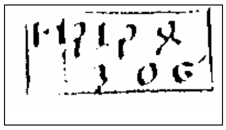
306...
1024 306024
Multiplikand nach rechts 306



0 · 306 = 0

3060..
1024 306024
Multiplikand nach rechts 306
2 · 306
2 · 3 = 6 | + 06 = 12

3120..
1024 312024
306



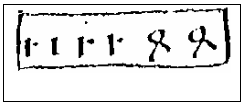
2 · 0 = 0
2 · 6 = 12 | + 0. = 12

31212.
1024 312124
Multiplikand nach rechts 306
4 · 306
4 · 3 = 12 | + 21 = 33

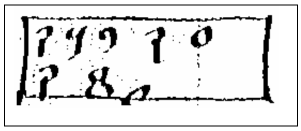
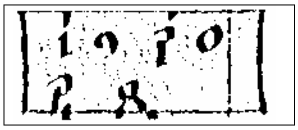
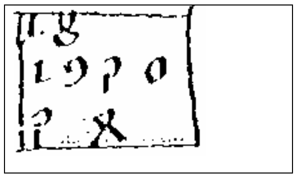
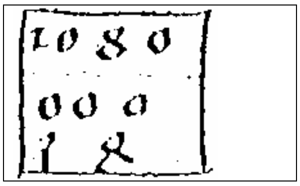
31332.
1024 313324
306

4 · 0 = 0
4 · 6 = 24 | + 2. = 44

313344
306



2.3 Division ganzer Zahlen

dividendus	25920	
dividens, divisor	24	
2 : 2 = 1		
25 : 24 > 1	1	
	25920	
	24	
25 − 1 · 24		
2 − 1 · 2 = 0		
5 − 1 · 4 = 1	1	
Divisor nach rechts	1920	
19 : 24 = 0	24	
Divisor nach rechts		
	10	
	1920	
	24	
19 : 2 > 9,		
aber 192 : 24 < 9, also 8		
	108	
	1920	
	24	
192 − 8 · 24		
19 − 8 · 2 = 3		
	108	
	320	
	24	
32 − 8 · 4 = 0		
Divisor nach rechts		
0 : 24 = 0		
	1080	
	000	
	24	

Ergebnis: 1080

3. Brüche

3.1 Römische Brüche

as **1,** ***semis*** **½,** ***uncia*** **1/12,** ***sextula*** **1/72,** ***scripulum*** **1/288 etc.**

3.2 Sexagesimalbrüche

gradus, minutum, secundum, tertium, quartum, quintum **etc.**

3.3 Allgemeine Brüche – *minutiae diversorum generum*

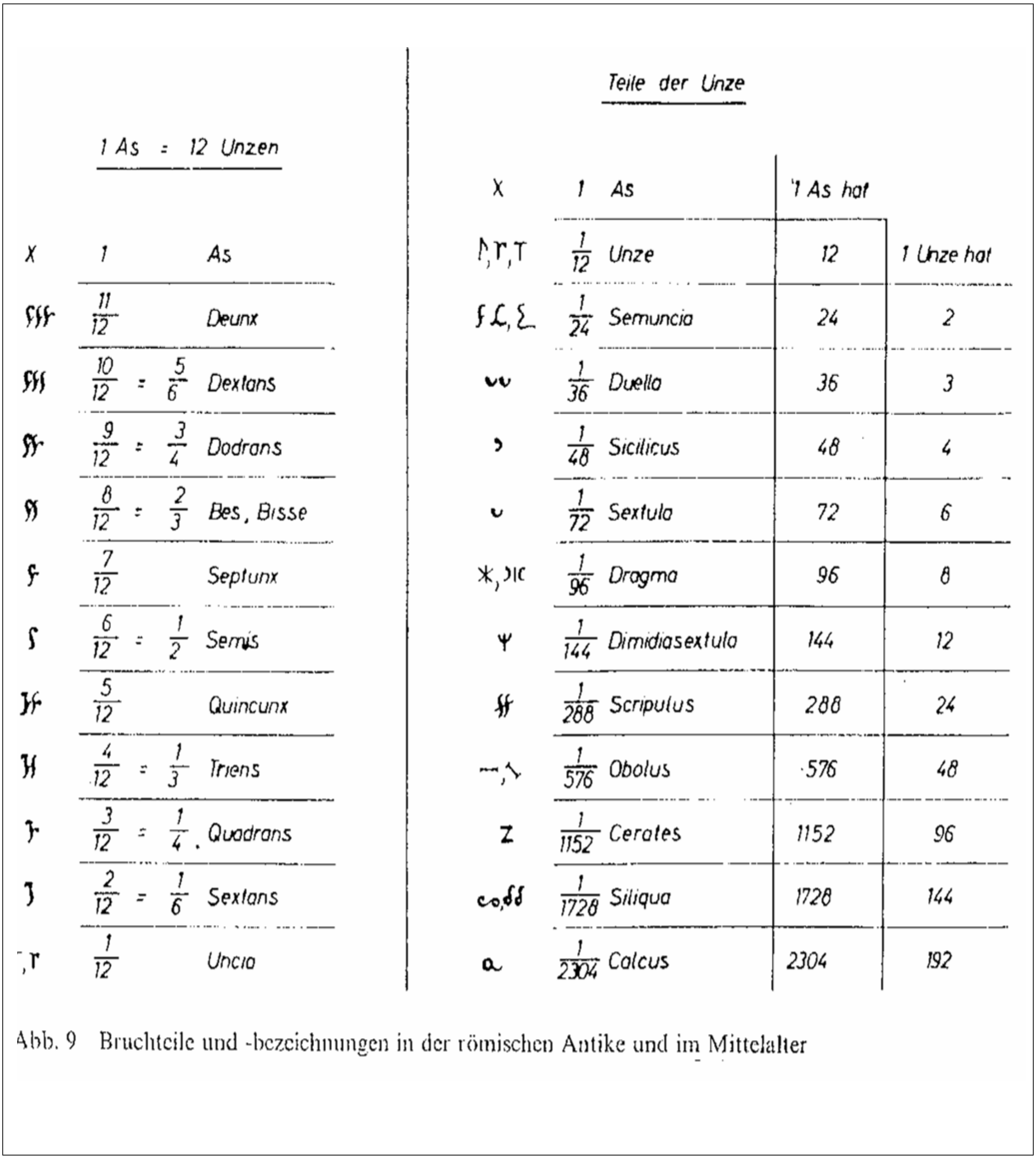
Terminologie

Bruch ***fractio, minutia***
Stellenwert, Benennung, 60er-Potenz ***denominatio, descriptio, differentia, genus***
Zähler ***~ dividens,***
(Vielfaches eines Stammbruches) ***pars***
z. B. ***duae partes de 13, 21 pars integri divisi in 39***
Nenner ***denominatio*** **(auch** ***differentia*****)**

resolvieren:
Teilbrüche unter dem größten Nenner zusammenfassen
(de)ducere, resolvere, retrahere

reduzieren:
einen Bruch in Teilbrüche mit kleineren Nennern zerlegen
elevare, reducere, vertere

3.1 Römische Brüche



1 As = 12 Unzen

X	1			As
	11/12			Deunx
	10/12	=	5/6	Dextans
	9/12	=	3/4	Dodrans
	8/12	=	2/3	Bes, Bisse
	7/12			Septunx
	6/12	=	1/2	Semis
	5/12			Quincunx
	4/12	=	1/3	Triens
	3/12	=	1/4	Quadrans
	2/12	=	1/6	Sextans
	1/12			Uncia

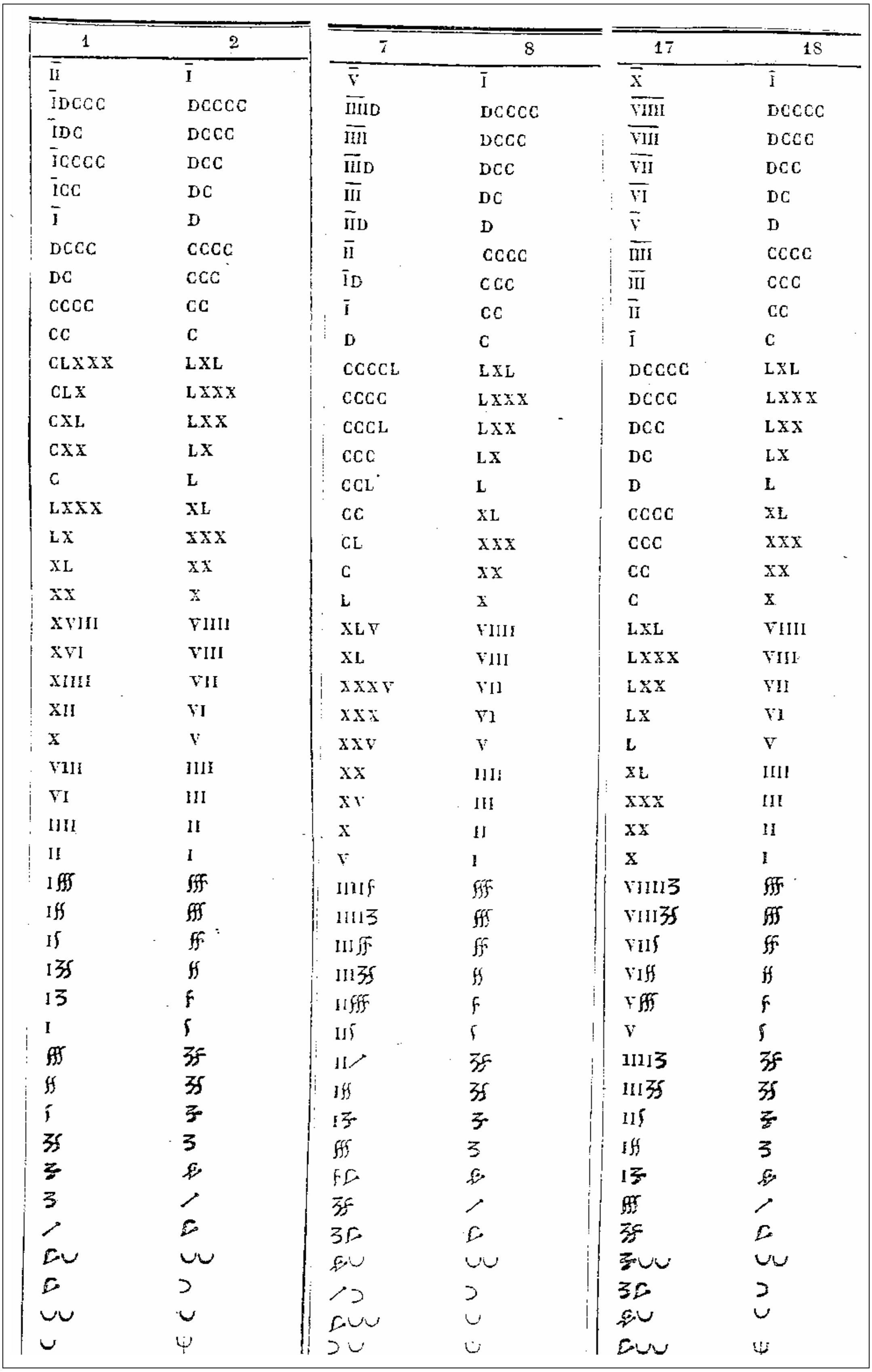
Teile der Unze

X	1	As	1 As hat	1 Unze hat
	1/12	Unze	12	
	1/24	Semuncia	24	2
	1/36	Duella	36	3
	1/48	Sicilicus	48	4
	1/72	Sextula	72	6
	1/96	Dragma	96	8
	1/144	Dimidiasextula	144	12
	1/288	Scripulus	288	24
	1/576	Obolus	576	48
	1/1152	Cerates	1152	96
	1/1728	Siliqua	1728	144
	1/2304	Calcus	2304	192

Abb. 9 Bruchteile und -bezeichnungen in der römischen Antike und im Mittelalter

Abb. 7: Minutien
(Vogel, Gerbert als Mathematiker, 1985: 18)

3.1 Römische Brüche



1	2	7	8	17	18
$\overline{II}$	$\overline{I}$	$\overline{V}$	$\overline{I}$	$\overline{X}$	$\overline{I}$
$\overline{I}$DCCC	DCCCC	$\overline{IIII}$D	DCCCC	$\overline{VIIII}$	DCCCC
$\overline{I}$DC	DCCC	$\overline{IIII}$	DCCC	$\overline{VIII}$	DCCC
$\overline{I}$CCCC	DCC	$\overline{III}$D	DCC	$\overline{VII}$	DCC
$\overline{I}$CC	DC	$\overline{III}$	DC	$\overline{VI}$	DC
$\overline{I}$	D	$\overline{II}$D	D	$\overline{V}$	D
DCCC	CCCC	$\overline{II}$	CCCC	$\overline{IIII}$	CCCC
DC	CCC	$\overline{I}$D	CCC	$\overline{III}$	CCC
CCCC	CC	$\overline{I}$	CC	$\overline{II}$	CC
CC	C	D	C	$\overline{I}$	C
CLXXX	LXL	CCCCL	LXL	DCCCC	LXL
CLX	LXXX	CCCC	LXXX	DCCC	LXXX
CXL	LXX	CCCL	LXX	DCC	LXX
CXX	LX	CCC	LX	DC	LX
C	L	CCL	L	D	L
LXXX	XL	CC	XL	CCCC	XL
LX	XXX	CL	XXX	CCC	XXX
XL	XX	C	XX	CC	XX
XX	X	L	X	C	X
XVIII	VIIII	XLV	VIIII	LXL	VIIII
XVI	VIII	XL	VIII	LXXX	VIII
XIIII	VII	XXXV	VII	LXX	VII
XII	VI	XXX	VI	LX	VI
X	V	XXV	V	L	V
VIII	IIII	XX	IIII	XL	IIII
VI	III	XV	III	XXX	III
IIII	II	X	II	XX	II
II	I	V	I	X	I
I[illegible]	[illegible]	IIII[illegible]	[illegible]	VIIII[illegible]	[illegible]
I[illegible]	[illegible]	IIII[illegible]	[illegible]	VIIII[illegible]	[illegible]
I[illegible]	[illegible]	III[illegible]	[illegible]	VII[illegible]	[illegible]
I[illegible]	[illegible]	III[illegible]	[illegible]	VI[illegible]	[illegible]
I[illegible]	[illegible]	II[illegible]	[illegible]	V[illegible]	[illegible]
I	[illegible]	II[illegible]	[illegible]	V	[illegible]
[illegible]	[illegible]	II[illegible]	[illegible]	IIII[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	I[illegible]	[illegible]	III[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	I[illegible]	[illegible]	II[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	I[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	I[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Abb. 8: Multiplikationstafel mit Minutien nach Victorius von Aquitanien ~457 (Friedlein, Victorii Calculus, 1871: 447-449)

3.1 Römische Brüche

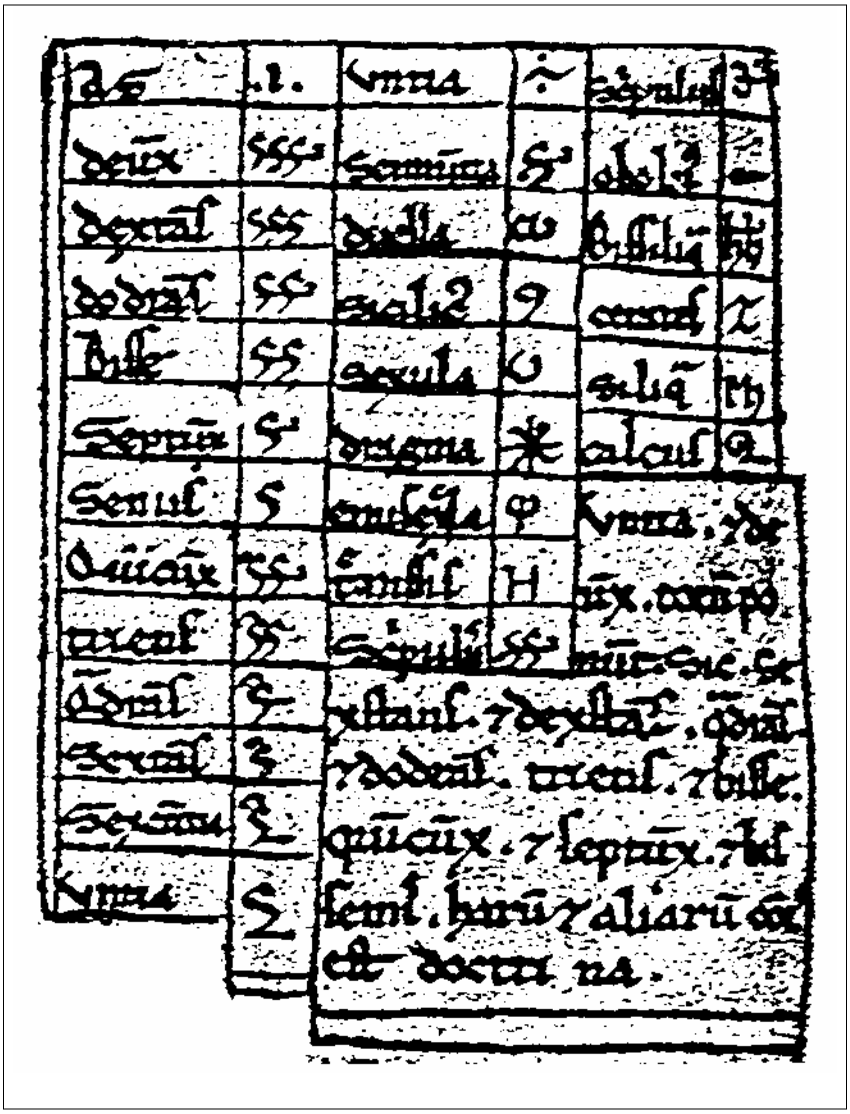


Abb. 9: Minutiendarstellung (Cod. Paris. lat. 16208, 68vb)

3.2 Sexagesimalbrüche

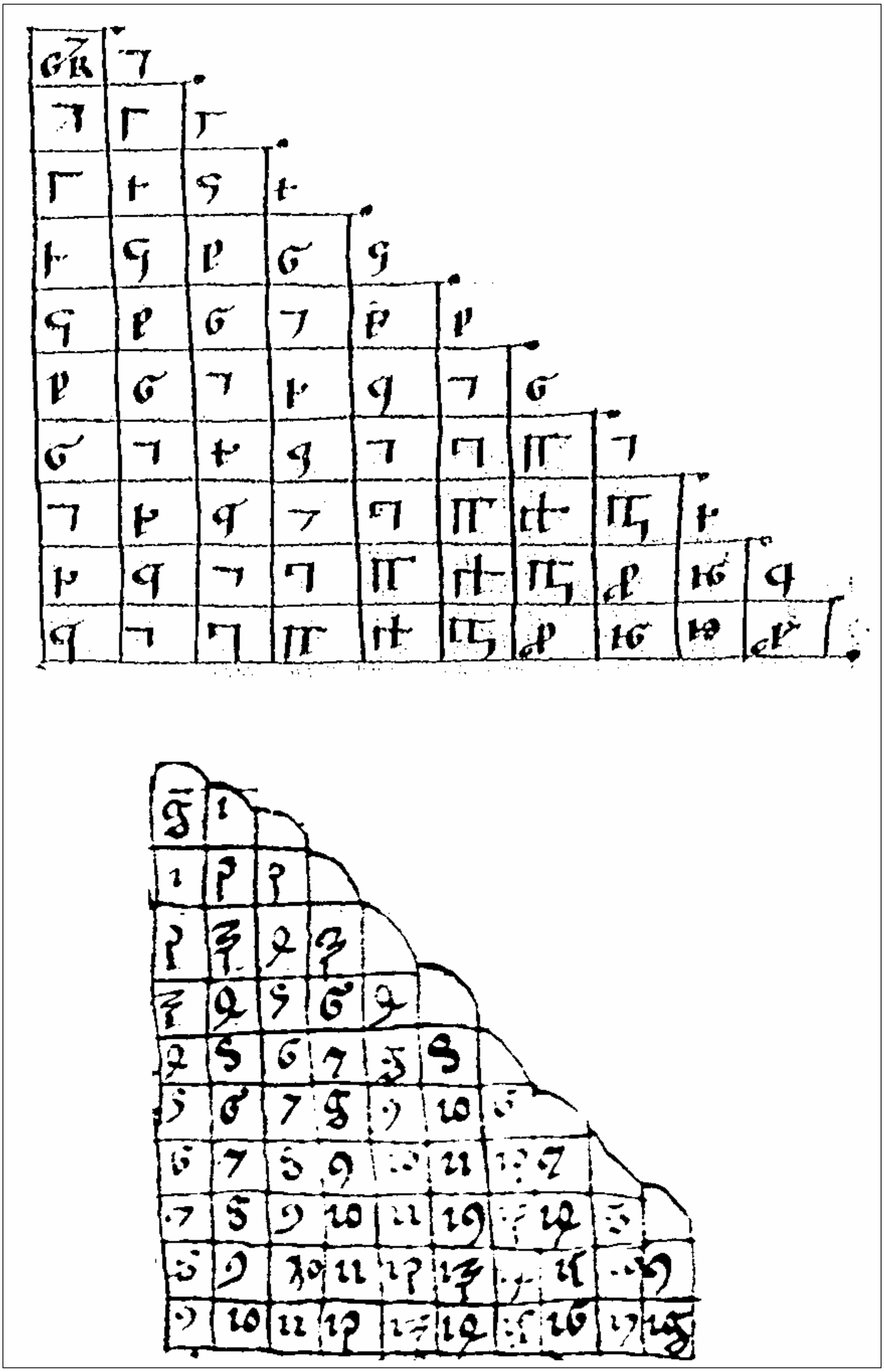
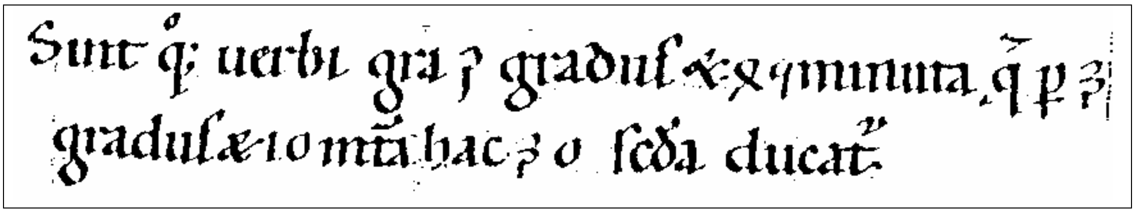


Abb. 10: Tafeln zur Multiplikation von Sexagesimalbrüchen durch Addition der Exponenten (cf. Cappelli 422 zu 12)
z. B. $(1/60)^2 \cdot (1/60)^3 = (1/60)^{2+3} = (1/60)^5$
(Clm 13021, 28ra; Cod. Paris. lat. 16208, 68vb)

3.2.3 Multiplikation von Sexagesimalbrüchen

Sint quoque verbi gratia
2 gradus et 45 minuta, quae per
3 gradus et 10 minuta ac 30 secunda ducantur.



2° 45' · 3° 10' 30''

<u>resolvieren</u>

2° 45' = 2 · 60' + 45' = 165'

3° 10' 30'' =
3 · 60 · 60'' + 10 · 60'' + 30'' = 11430''

<u>multiplizieren</u>

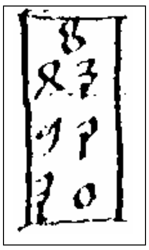
165' · 11430'' = 1885950'''

<u>reduzieren</u>

1885950''' = 1885950'' : 60 = 31432'' 30'''
31432'' = 31432' : 60 = 523' 52''
532' = 532' : 60 = 8° 43'

<u>Ergebnis</u>

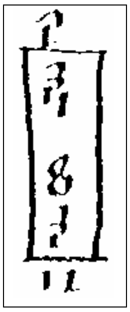
8° 43' 52'' 30'''



3.3.1 Multiplikation allgemeiner Brüche

3 et dimidium per 8 et 3 undecimos ducere

3 ½ · 8 3/11



resolvieren

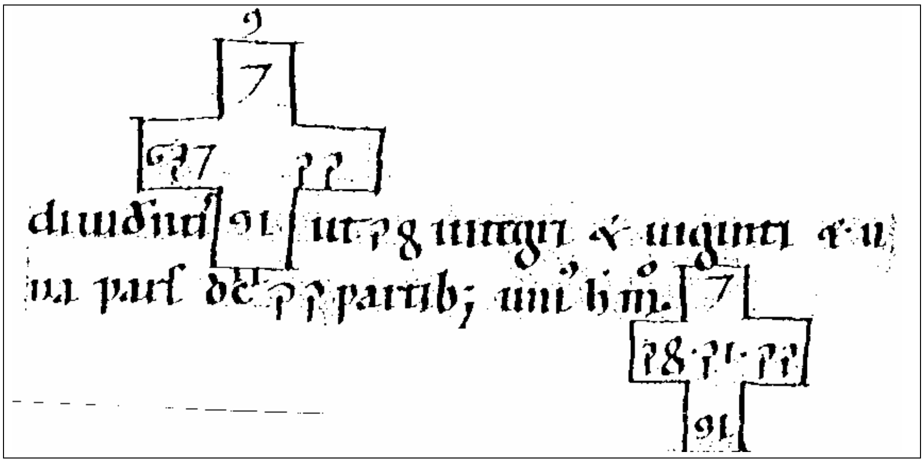
3 1/2 = 7/2, da 2 · 3 = 6 | + 1 = 7
8 3/11 = 91/11, da 11 · 8 = 88 | + 3 = 91

multiplizieren

Zähler · Zähler: 7 · 91 = 637
Nenner · Nenner: 2 · 11 = 22

reduzieren

637 : 22 =
28 Rest 21



Ergebnis

28 21/22

Qui numerus de divisione excreverit,
integer erit,
residuum vero partes erunt dividentis,
ut 28 integri et
viginti et una pars de 22 partibus unius
hoc modo

3.3.2 Division allgemeiner Brüche

20 et duas partes ex 13 per 3 et tertiam

20 2/13 : 3 1/3

kleinstes gemeinsames Vielfaches der Nenner
3 · 13 = 39

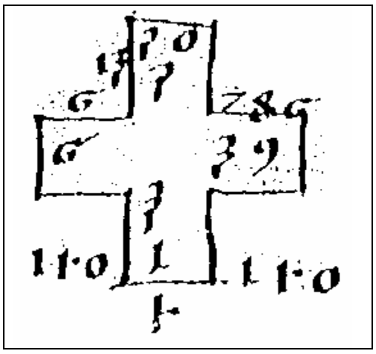
Wie viele 39stel sind 20 2/13?

20 · 39 = 780 | + 6 = 786
weil das Verhältnis 2 : 13 = (3 · 2) : 39

Wie viele 39stel sind 3 1/3?

3 · 39 = 117 | + 13 = 130
weil das Verhältnis 1 : 3 = 13 : 39

also
20 2/13 : 3 1/3 =
786/39 : 130/39 =
786 : 130



dividieren
786 : 130 = 6 Rest 6

Ergebnis: 6 6/130

4. Quadratwurzeln – *radices*

ziehen **extrahere, invenire**

4.1 Ganzzahlige Quadratwurzeln

4.1.1 Produkte ganzzahlig radizierbarer Zahlen sind ganzzahlig radizierbar

4.1.2 Eigentümliche Quotientenregel

Si duorum ad invicem dividendorum denominatio radicem habuerit, et eorum in se summa **[29ra].**
Wenn von zwei wechselseitig dividierten Zahlen der Nenner jeweils eine Wurzel hat, dann auch deren Produkt.
► bei Allard verständnislos übersetzt [51]

Wenn zwei Zahlen (ab^2 und ac^2) sich in einem Bruch so kürzen lassen,
dass Zähler und Nenner eine ganzzahlige Wurzel haben (b und c), dann hat das Produkt der beiden Zahlen ebenfalls eine ganzzahlige Wurzel: $\sqrt{ab^2ac^2} = abc$.

Beispiel (18 und 8): 18/8 = 9/4 und 8/18 = 4/9 beide mit ganzzahlig radizierbarem Nenner, also $\sqrt{18 \cdot 8} = \sqrt{144} = 12$ ganzzahlig

4.1.3 Geradzahlige Zehnerpotenzen sind ganzzahlig radizierbar

ungerade *differentiae* (gerade Exponenten): 1, 100 etc.

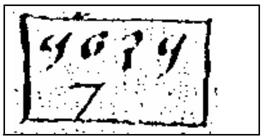
4.1.4 Sexagesimalbrüche mit geradzahligen Exponenten sind ganzzahlig radizierbar

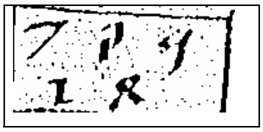
gerade *differentiae* der *minutiae*: *secunda, quarta, sexta* usw.

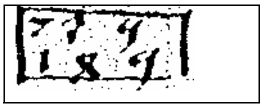
4.2 Ganzzahlige Wurzeln aus ganzen Zahlen

```
heute:          √5625 = 75
                 49
                  725
                  725   [7 · 2 = 14]   145 · 5
                    0
```

```
                                5625
7 · 7 = 49 < 56
                                5625
                                 7

56 - 7 · 7 = 7
                                 725
                                 7

7 · 2 = 14
                                 725
                                 14

145 · 5 <= 725
                                 725
                                 145

725 - 145 · 5
 7 - 1 · 5 = 2
                                 225
                                 145

22 - 4 · 5 = 2
                                  25
                                 145

25 - 5 · 5 = 0
```

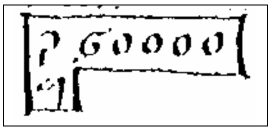




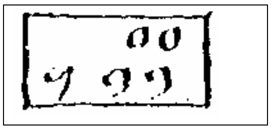
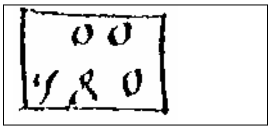
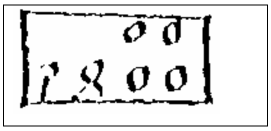
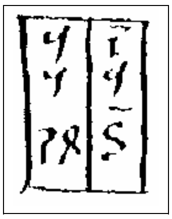


Ergebnis: 75

4.4 Sexagesimale Wurzeln aus ganzen Zahlen

$\sqrt{26}$	260000	
$5 \cdot 5 = 25 < 26$		
	260000 5	
$26 - 5 \cdot 5 = 1$		
	10000 5	nicht in Hs.
$5 \cdot 2 = 10$		
$100 \cdot 0 = 0$		
$[101 \cdot 1 > 100]$		
$50 \cdot 2 = 100$		
$1009 \cdot 9 = 9081$		
$10000 - 9081 = 919$	919 1009	verwerfen

Ergebnis: $\sqrt{260000} \approx 509$

halbe Zahl der angefügten Nullen	00 509	
5 Ganze; $9 \cdot 60 = 540$ [9/100 = 5,40/60]	00 540	
5 *minuta*; $40 \cdot 60 = 2400$ [0,40/60 = 24,00/3600]	00 2400	
24 *secunda* glatt		

Ergebnis
$\sqrt{26} \approx 5° \; 5' \; 24''$

4.5 Wurzeln aus allgemeinen Brüchen

radix duorum tertiaeve ac tertiae decimae

$\sqrt{}2\ 1/3\ 1/13$

<u>resolvieren</u>
gewissermaßen zu *minuta* machen
gemeinsamer Nenner 39

$2\ 1/3\ 1/13 = 78/39 + 13/39 + 3/39 = 94/39$

gewissermaßen zu *secunda* machen,
um die Wurzel ziehen zu können

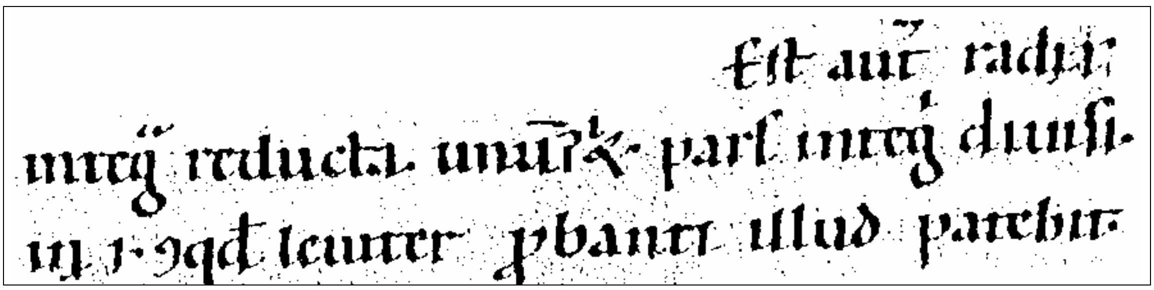
$94/39 = (94 \cdot 39)/39^2 = 3666/39^2$

<u>radizieren</u>
zerlegen: $3666 = 3600 + 66$

$\sqrt{(3600/39^2)} = 60/39$ *„minuta"*
60 tricesimae nonae partes unius
Rest $66/39^2$ *„secunda"*

<u>reduzieren</u>
$60/39 = 1\ 21/39$

Est autem radix [ad] integra reducta
unum et 21 pars integri divisi in 39
quod leviter probanti illud patebit.



5. Zusammenfassung

1. Algorithmen sind teilweise sehr aufwändig und zeitraubend.

2. Rechenproben
Neunerprobe beim Multiplizieren und Duplizieren
Ausmultiplizieren bei der Division

3. Zwei Arten von Brüchen konkurrieren: allgemeine und sexagesimale. Die römischen sind im 12. Jahrhundert selten.

4. Formale Darstellung allgemeiner Brüche fehlt (Rechenkreuz statt Bruchstrich).

5. Dezimalbruchdarstellung (Dezimalkomma und Nachkommastellen) scheinen nur in einer ersten Idee beim Wurzelziehen auf (Verlängerung um 00-Paare).

6. Der Gedanke an Exponenten der Zahl 10 ist implizit vorhanden – assoziiert an Ziffernpositionen, die von rechts gezählt werden. Er wird deutlich beim Wurzelziehen:

- **ganze Zahlen mit ungeradzahlig vielen *differentiae* (1, 100, 10000 etc.) und**
- **gerade *differentiae* der *minutiae* (*secunda, quarta, sexta* etc.)**

und bei der Sexagesimalbruch-Multiplikation, die mit der „Exponentenaddition“ auch eine erste Idee logarithmischen Rechnens zeigt.

7. Formale und natürlichsprachliche Darstellungen sowie Beispiele finden sich im gleichen Text nebeneinander.
Zu jeder Rechenvorschrift wird nur ein Beispiel genannt.

8. Weglassen von Nebenrechnungen wie in moderner mathematischer Forschungsliteratur:
***quod leviter probanti illud patebit* [29 ra]**

6. Literaturverzeichnis

Allard, André: Le calcul indien: Algorismus. Histoire des textes, éd. crit., trad. et comm. des plus anciennes versions latines du 12e siècle issues de l'arithmétique d'al-Khwârizmî. Paris: Blanchard 1992

Allard, André: Les plus anciennes versions latines du 12e siècle issues de l'arithmétique d'al-Khwârizmî. Louvain (Dissertation) 1975
[nur in München, Fak. f. Gesch. und Kunstwiss. 1603/A 9a Hwa 016(n.v)]

Boncompagni, Baldassarre: Trattati d'aritmetica I: Algoritmi de numero Indorum. Rom 1857

Boncompagni, Baldassarre: Trattati d'aritmetica II: Ioannis Hispalensis *liber algorismi de practica arismetrice*. Rom 1857, 25-136

Busard, Hub Lambert Ludwig: Het rekenen met breuken in de middele euwen, in het bizonder bij Johannes de Lineriis. Brüssel 1968, 35 S. (Sonderdruck)

Busard, Hub Lambert Ludwig: Über eine Vorlage des Traktats Algorismus de minutiis von Johannes de Lineriis. Sudhoffs Archiv 82(1998) 74-91

Cantor, Moritz: Über einen Codex des Klosters Salem. Zeitschrift für Mathematik und Physik (Leipzig) 10(1865) 1-16
[zu Univ. Bibl. Heidelberg, Salem IX, 23]

Curtze, Maximilian: Über eine Algorismus-Schrift des 12. Jh. Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik (Leipzig) 8(1898) = Zeitschrift für Mathematik und Physik (Leipzig) 42(1898) Suppl. 1-27 [zu Clm 13021 Liber ysagogarum Alchorismi]

Curtze, Maximilian: Petri Philomeni de Dacia in Algorismum vulgarem Johannis de Sacrobosco commentarius cum Algorismo ipso. Kopenhagen 1897, 112 p.

Eneström, Gustaf: Der „Algorismus de integris" des Meisters Gernardus. Bibliotheca Mathematica (Stockholm) ^{3}13(1912/13) 289-332

Eneström, Gustaf: Der „Algorismus de minutiis" des Meisters Gernardus. Bibliotheca Mathematica (Stockholm) ^{3}14(1913/14) 99-149

Eneström, Gustaf: Das Bruchrechnen des Jordanus Nemorarius. Bibliotheca Mathematica (Stockholm) ^{3}14(1913/14) 41-54

Folkerts, Menso; Kunitzsch, Paul: Die älteste lateinische Schrift über das indische Rechnen nach al-Hwârizmî. Bayerische Akademie der Wissenschaften, Philosophisch-historische Klasse, Abhandlungen, Heft 113, München 1997

Friedlein, Gottfried: Das Rechnen mit Kolumnen vor dem 10. Jh. [Kap. III]. Zeitschrift für Mathematik und Physik (Leipzig) 9(1864) 297-330

Friedlein, Gottfried: Die Entwicklung des Rechnens mit Kolumnen [Kap. IV]. Zeitschrift für Mathematik und Physik (Leipzig) 10(1865) 241-282

Friedlein, Gottfried: Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes vom 7. bis 13. Jh. Erlangen 1869 [= ND 1968]

Friedlein, Gottfried: Victorii calculus ex codice Vaticano editus. Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche (Rom) 4(1871) 443-463

Illmer, Detlef: Arithmetik in der gelehrten Arbeitsweise des frühen Mittelalters. In: Fenske, L., Rösener, W., Zotz, Th. (ed.): Institutionen, Kultur und Gesellschaft im Mittelalter. Sigmaringen: Thorbecke 1984, 35-58

Karpinski, Louis Charles: Two twelfth century algorisms. Isis (An international review devoted to the history of science and its cultural influences; Berkeley CA) 3(1920/21) 396-413 [From two mss. in the British Museum]

Nagl, Alfred: Über eine Algorismusschrift des 12. Jh. und über die Verbreitung der indisch-arabischen Rechenkunst und Zahlzeichen im christlichen Abendland. Zeitschrift für Mathematik und Physik, historisch-literarische Abteilung (Leipzig) 34(1889) 129-146, 161-170 [Cod. Vind. 275, nur eine Seite]

Pedersen, Fridericus Saaby: Petri Philomenae de Dacia et Petri de S. Audomaro opera quadrivialia (= Corpus Philosophorum Danicorum Medii Aevi, Pars 1, X:I). Kopenhagen 1983

Vogel, Kurt: Mohammed Ibn Musa Alchwarizmis Algorismus. Das früheste Lehrbuch zum Rechnen mit indischen Ziffern. Cambr.Un.Lib.Ms.Ii 6.5. Aalen: Otto Zeller 1963

Yeldham, Florence A.: The story of reckoning in the Middle Ages. London 1926