

I. Quadrivium

II. Arithmetik

1. Zahldarstellung
2. Arabische Zahlen
3. Astronomische Tafeln

III. Al-Khwarizmis Algorithmus

1. Grundlagen
2. Ganze Zahlen
3. Brüche
4. Quadratwurzeln
5. Zusammenfassung

Alfred Holl

Das Quadrivium im Mittelalter

Teil 1: Arithmetik

Die arithmetischen Algorithmen im Algorithmus von al-Khwarizmis *Liber ysagogarum*
Die Regensburg-Prüfeninger Fassung einer mittelalterlichen Einführung in das Rechnen mit arabischen Zahlen

II.1. Zahldarstellung

Stellenwert-System / Positions-System:

Zahlenwert eines Ziffernzeichens
hängt von dessen Form und Position ab.

2222

$$2 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 1$$
$$2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$$

Additives System:

Zahlenwert eines Ziffernzeichens
hängt nur von dessen Form ab.

MMCCXXII

$$1000 + 1000 + 100 + 100 + 10 + 10 + 1 + 1$$

„Position“ kann nur festlegen,
ob der Wert addiert oder subtrahiert wird
 $IX = -1 + 10$; $XI = 10 + 1$

Ziffer	griech. Alphabet- ziffern	kyrill. Alphabetziffern (altkirchen slawisch)	hebr. Alphabet- ziffern (Kabbala)	arab. Neshi- Alphabet-ziffern ≠ Alphabet-Folge	ostarab. Ziffern
0					۰
1	A	a	א alef	ا alif	۱
2	B	в	ב beth	ب bā	۲
3	Γ	Г	ג gimel	ج ġīm	۳
4	Δ	д	ד daleth	د dāl	۴ ۴
5	E	e	ה he	ه hā	۵ ۵
6	ς (στίγμα, digamma)	s [dz]	ו waw	و waw	۶ ۶
7	Z	з	ז zajin	ز zāī	۷
8	H	и	ח chet	ح hā	۸
9	Θ	θ	ט tet	ط ṭā	۹
10	I	1	י jod	ع iā	

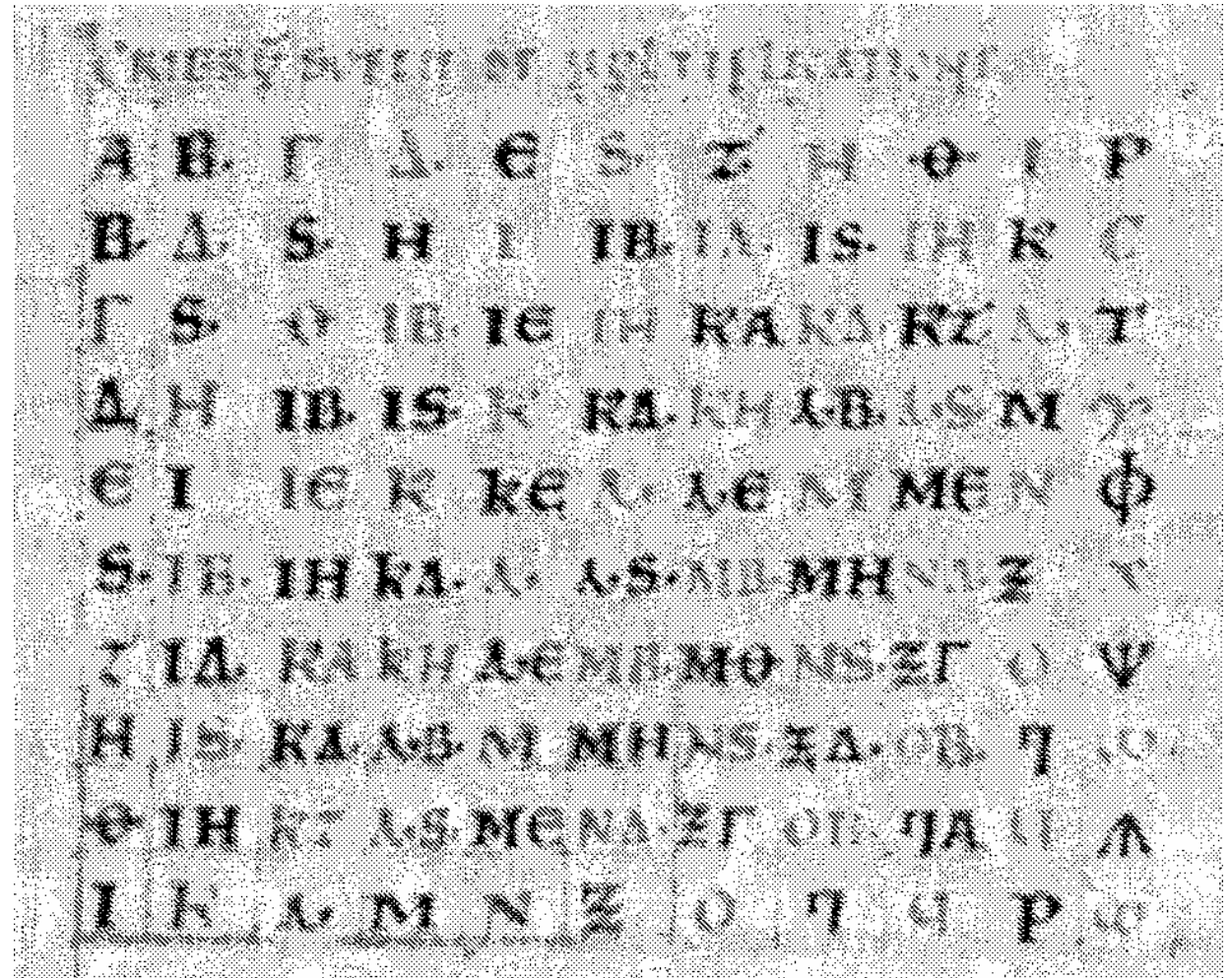
Ziffer	griech. Alphabet- ziffern	kyrill. Alphabetziffern (altkirchenslawisch)	hebr. Alphabetziffern (Kabbala)	arab. Neshi- Alphabet-ziffern ≠ Alphabet-Folge	ostarab. Ziffern
10	I	Ⲁ	י jod	ى jā	
20	K	Ⲃ	כ kaph	ك kāf	
30	Λ	Ⲅ	ל lamed	ل lām	
40	M	Ⲇ	מ mem	م mīm	
50	N	Ⲉ	נ nun	ن nūn	
60	Ξ	Ⲋ	ס samech	س sīn	
70	O	Ⲍ	ע 'ajin	ع 'ain	
80	Π	Ⲏ	פ pe	ف fā	
90	Ϟ κόππα	Ⲑ	צ ṣade	ص ṣād	
100	P	Ⲓ	ק qoph	ق qāf	
200	Σ	Ⲕ	ר resch	ر rā	
300	T	Ⲗ	ש s(ch)in	ش šīn	
400	Υ	Ⲙ	ת taw	ت tā	
500	Φ	Ⲛ	תק	ث tā [θ]	
600	X	Ⲝ		خ hā [χ]	
700	Ψ	Ⲟ		ذ dāl [ḏ]	
800	Ω	Ⲡ		ض d'ād	
900	Ϻ σανπι	Ⲣ	תתק	ظ zā	
1000	'Α	Ⲥ	'א	غ gain	

1. Zahldarstellung

Cribrum Boethii de multiplicatione

Multiplikationstafel
im additiven System der
griechischen Buchstaben

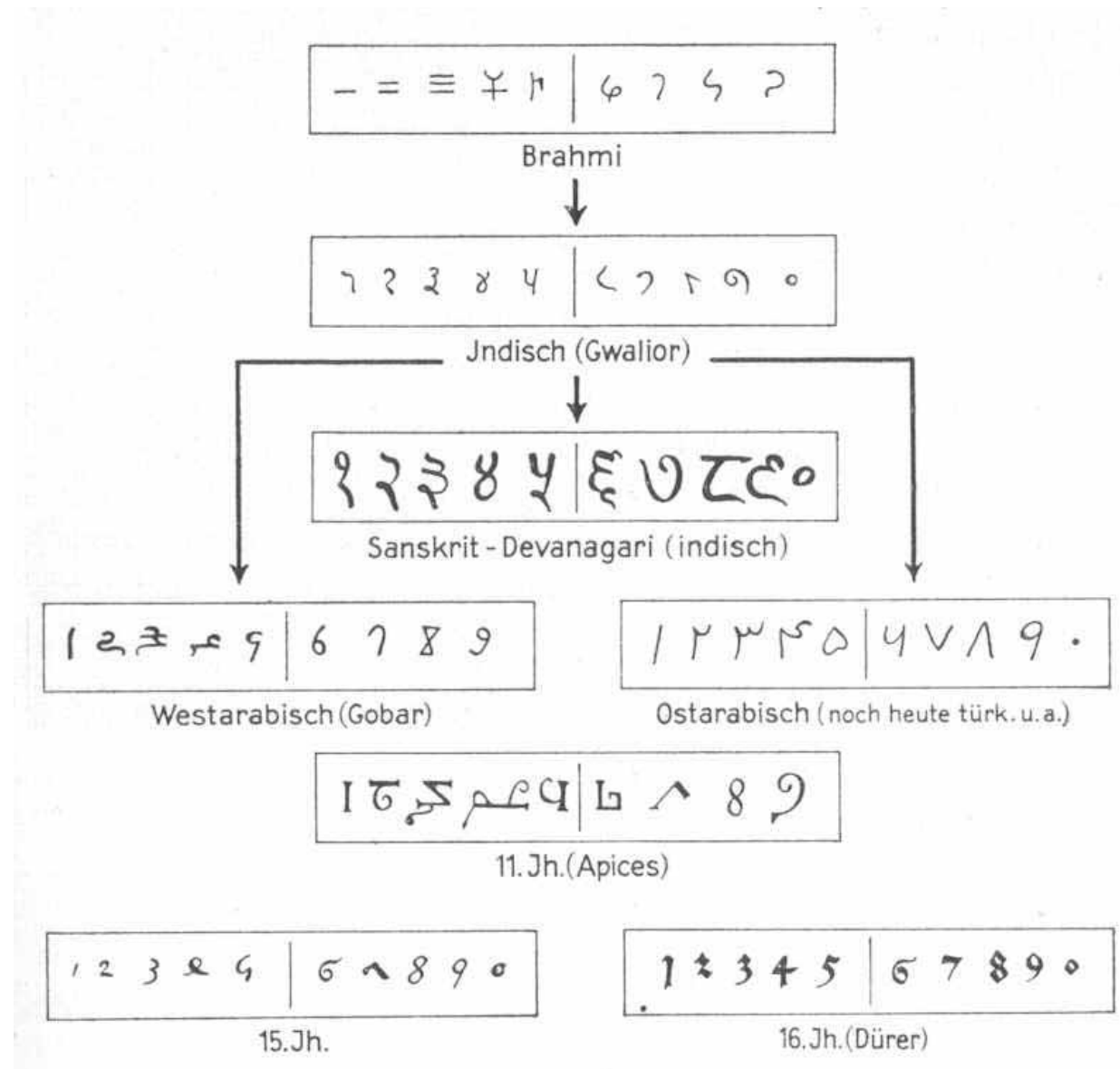
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	200
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	300
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	400
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	500
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	600
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	700
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	800
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	900
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	1000



(Evans 1977, 26-27: Oxford, St. John's College MS 17, 56v)

2. Arab. Zahlen – Ursprung

Stammbaum der arabischen Ziffern



(Menninger, Kulturgeschichte der Zahlen, 1934, 329)

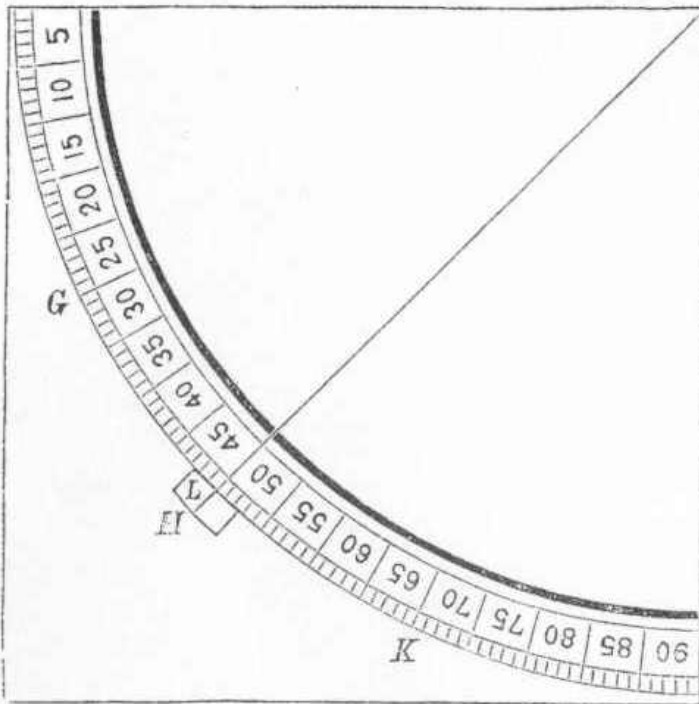
2. Arab. Zahlen – Ausbreitung

Al-Battani (~858 - 929)

Kitab al-Zidsch

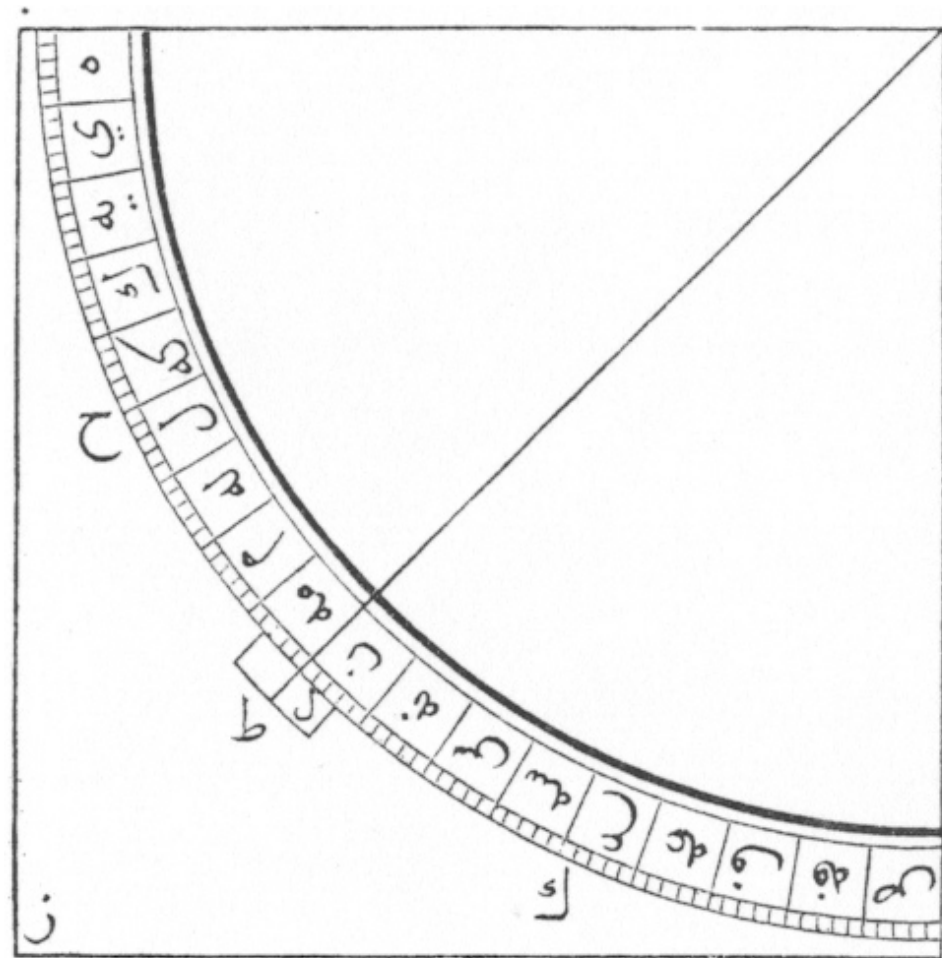
Opus astronomicum

übersetzt von Plato von Tivoli



(ed. Nallino, Carlo Alfonso,
1899-1903, I 142, III 214)

Quadrans murale: N-S-orientiert
zur Messung des Sonnenhöchststandes
(G Wintersolstitien, K Sommersolstitien)



2. Arab. Zahlen – Ausbreitung

Al-Battani (~858 - 929)

Kitab al-Zidsch

Opus astronomicum

Kalifen mit Beginn der Hedschra-Zeitrechnung
am 1. Muharram des Jahres 1 der Hedschra
Fr 16.07.622 bzw. Do 15.07.622 (astronomisch)

جدول تاريخ الخلفاء من لدن هجرة النبي صلى الله عليه وسلم						
Chronologia khalifarum a secessione Prophetarum, cui Deus propitius est et salutem praestat.						
اسماء الخلفاء الراشدين من لدن الهجرة على ان اول يوم من المحرم الجمعة والذي يُعَمَلُ عليه في التاريخ الخميس وهذا الحرم لاول سنة الهجرة			ما ملك كل واحد منهم			مجموعة السنين Annorum summa.
Nomina khalifarum iustorum a secessione (hijrah), cum dies Veneris ponatur primus dies mensis muharram. Sed in chronologia [astronomorum] a die Iovis incipitur. Pertinet hic muharram ad primum hegirae annum.			Quot quisque eorum regnaverit tempus.			
سنة	Anni.	شهور	الايام	سنة	شهور	الايام
Ann.	Menses.	Dies.	Ann.	Menses.	Dies.	
Fuit secessio Prophetarum cui est aeterna salus, ab urbe Mekkah ad al-Medinah primo anno.	0	2	8	0	2	8
Mansitque secedens al-Medinah in urbe ad mortem usque.	9	11	22	10	2	0
Abu Bakr ibn Abi Quhafah e [tribu] Banu Taym.	2	3	8	12	5	8
'Omar ibn al-Khattab e [tribu] Banu 'Adi.	10	6	17	22	11	25
Et fuit deliberatio post 'Omar ibn al-Khattab.	0	0	3	22	11	28
'Othman ibn 'Affan ex Banu Umayyah.	11	11	19	34	11	17
'Ali ibn Abi Talib et secedit.	4	9	0	39	8	17

جدول تاريخ الخلفاء من لدن الهجرة هجرة النبي صلى الله عليه وسلم						
مجموعة السنين			ما ملك كل واحد منهم			اسماء الخلفاء الراشدين من لدن الهجرة على ان اول يوم من الحرم الجمعة والذي يُعَمَلُ عليه في التاريخ الخميس وهذا الحرم لاول سنة الهجرة
سنة	شهور	ايام	سنة	شهور	ايام	
ح	ب	هـ	ح	ب	هـ	<p>كانت هجرة النبي محمد صلى الله عليه وسلم من مكة الى المدينة سنة احدى لها فمكث مهاجراً بالمدينة حتى قبض ابو بكر بن ابي قحافة من بني تيم عمر بن الخطاب من بني عدي وكانت الشورى بعد عمر بن الخطاب عثمان بن عفان من بني امية علي بن ابي طالب والفطنة</p>
هـ	ب	ي	ك	ب	ط	
ح	د	ي	ح	ج	ب	
ك	ب	ك	ز	و	ي	
ك	ب	ك	ج	هـ	هـ	
ز	ب	ك	ب	ب	ب	
يو	ح	ط	هـ	ط	د	

(ed. Nallino, Carlo Alfonso, 1899-1903, I 4, III 231)

2. Arab. Zahlen – Ausbreitung

Zwei Abakus-Typen!

\bar{e}	\bar{x}	\bar{i}	\bar{c}	\bar{x}	\bar{i}	
				I	A	13
				8	A	87
		A		I	9	4 019
A			9	7		400 520
			9	A	9	539
I				L	9	100 065

Gerberts **Klosterabakus** (~1000)
(Ifrah, Universalgesch. Zahlen, 1991, 532)

	Si pos	ce len tis	tem e III as	xe ni	calc tis	qui nas	ar bas	or mus	an dra	lg m
	⊙	7	8	A	b	9	∞	∞	∞	I
ca	ca	io	ci	xi	oi	c	a	i	c	x
\bar{i}	\bar{v}	$\bar{\delta}$	\bar{l}	\bar{v}	$\bar{\delta}$	\bar{l}	\bar{v}	$\bar{\delta}$	\bar{l}	\bar{v}
$\bar{\delta}\bar{\delta}$	$\bar{\delta}\bar{\delta}$	$\bar{\delta}\bar{\delta}$	$\bar{\delta}\bar{\delta}$	$\bar{\delta}\bar{\delta}$	$\bar{\delta}$					
arv	ii	cel	arv	ii	cel	arv	ii	cel	arv	ii
$\bar{\delta}$	$\bar{\delta}$	$\bar{\delta}$	$\bar{\delta}$	$\bar{\delta}$	cel					
arv	i	cel	arv	i	cel	arv	i	cel	arv	i
$\bar{\delta}$	cel	cel	cel	cel						

„Boethius“ Geometrie II
(Folkerts, 1970, Tafel 5)
(Berlin, lat. 8° 162, 73v, 10. Jh.)

2. Arab. Zahlen – Ausbreitung

Arithmetica (1 2 4 8, 1 3 9 27)

Boethius Algorist, Pythagoras Abacist (1241, 82)



(Gregor Reisch:
Margarita Philosophica, 1503)



2. Arab. Zahlen – Ausbreitung

Noch 1299 Gebrauch
der neuen Ziffern
den Kaufleuten in Florenz
verboten (Fälschungsgefahr)
(Nagl 1889, 162)

Das jahrhundertelange
Nebeneinander
von arab. und röm. Zahlen
endet erst in der Zeit

von **Regiomontan**
(1436-1476)

(Epitome in Ptolemaei almagestum,
Venedig 1496, Trinity College Cambridge)

Rechenbücher 2. Hälfte 15. Jh.
Algorismus Ratisbonensis 1463

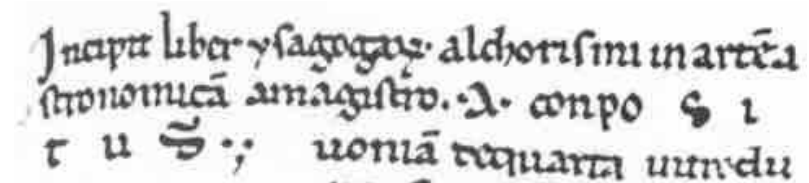


2. Arab. Zahlen – Ausbreitung

Anleitungen zum Rechnen mit arab. Zahlen erscheinen oft als erster Teil einer Einführung ins Quadrivium oder in die Astronomie

Denn:

arab. Zahlen Voraussetzung für astronom. Tafeln



(Bibl. Nat. Paris, Lat. 16208, 67r)

Mohammed ben Mūsā al-Khwarizmi (~780-~850)

Perser aus Khwârazm / Khorasmia
am Unterlauf des Amu-Darya (Aral-See)
latinisiert **Algorismus**

Liber ysagogarum (Einführung ins Quadrivium)
übersetzt von Adelhard von Bath (aktiv 1116-1142)
arab. nicht erhalten, nur in lat. Übersetzungen

Algorismus =

Anleitung zum Rechnen mit arab. Zahlen
Einführung der 0 aus der indischen Mathematik

Astronomische Tafeln übers. von Adelhard 1126

Al-Jabr wal-muqâbalah 'Algebra' (820)

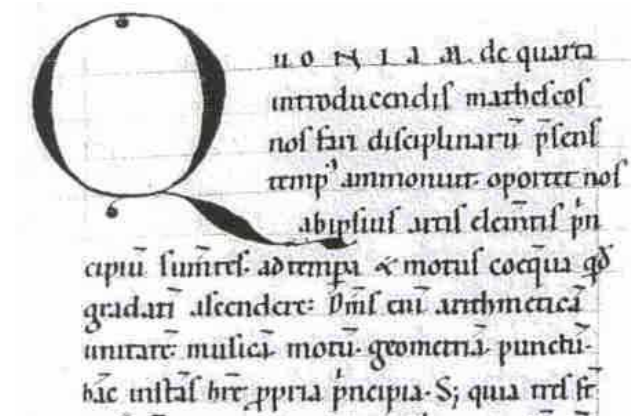
Buch über quadratische Gleichungen
übersetzt von Gerhard von Cremona, Plato von Tivoli und Robert von Chester (1145)

3. Astronomische Tafeln

CIm 13021

Kloster Prüfening, ~1165

Im Anschluss an den
Liber ysagogarum Alchorismi
des **al-Khwarizmi**
(ed. Vogel 1963, Allard 1992)

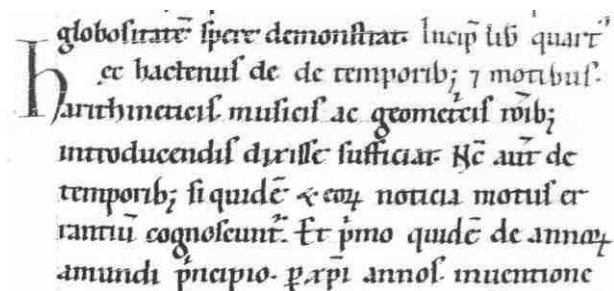


U o r i a a. de quarta
introducendis matheseos
nos sui disciplinaru p'sent
temp' ammonuit oportet nos
ab ipsius artis elementis p'n
cipiu sumere: ad tempa & motus cocqua qd
gradati ascendere: Omis cui arithmetica
unitate: musica: motu: geometria: punctu:
hic unital bre ppria p'ncipia: S; quia tral fr

(CIm 13021, 27r)

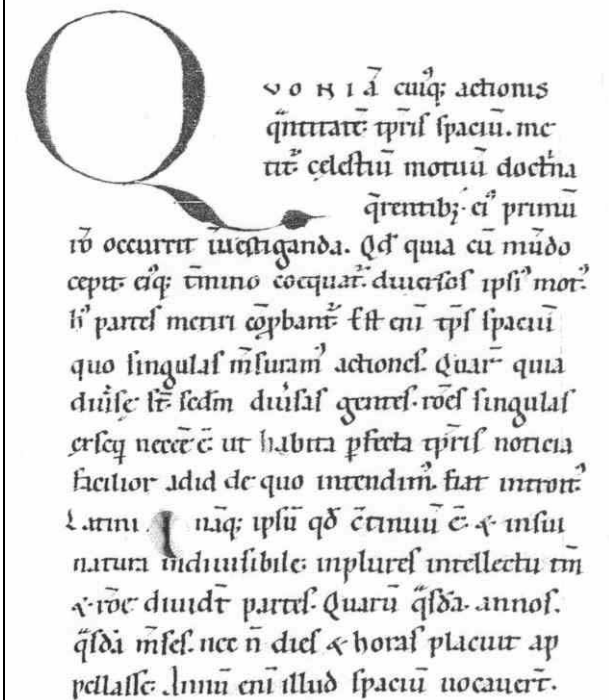
Einführung in die Astronomie,
Tabellen mit *Canones* (Benutzungsanleitung)
in Anlehnung an **al-Zarqalis** (~1030-~1090)
Tafeln von Toledo (*Tabulae Toletanae*)
übersetzt von Gerhard von Cremona (1114-1187)
(ed. Millás Vallicrosa 1943-1950)

4. Buch al-Khwarizmis: Astronomie



globofitate sper demonstrat: Incip lib quart
ec hactenus de de temporib; 7 motibul:
H arithmetical musical ac geometrical roib;
introducendis dyrisse sufficiat: Hc aut de
temporib; si quide & eoz noticia motul cr
tantu cognoscunt. Et pmo quide de annoz
amundi pncipio p xpi annos inuentione

(CIm 13021, 30r)



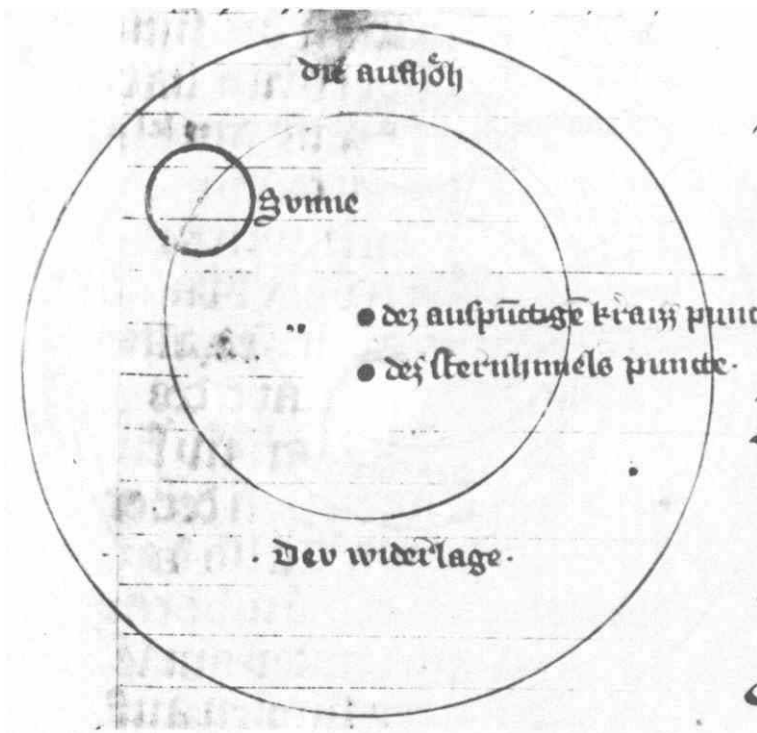
Q u o r i a cuiq; actionis
qntitate tpris spaciū me
tit celestiu motu doctna
qrentib; ei primū
rō occurrit iuestiganda. Qd quia cū mūdo
cepit eiq; tmino cocquat diuersos ipsi mot
h' partes metiri cōpbanē: Est enī tps spaciū
quo singular m'suram' actionel. Quar' quia
diuise sē scdm diuisal gentes: rōel singular
etsey necesse ē ut habita pfecta tpris noticia
facilior adid de quo intendim' fiat introit
latini. U nāq; ipsū qd cōtinuū ē & insui
natura indiuisibile: implures intellectu tm
& rōel diuidit partes. Quarū qsdā annos.
qsdā m'sel. nec n' dies & horas placuit ap
pellasse. Annū enī illud spaciū uocauerē.

(CIm 13021, 31v)

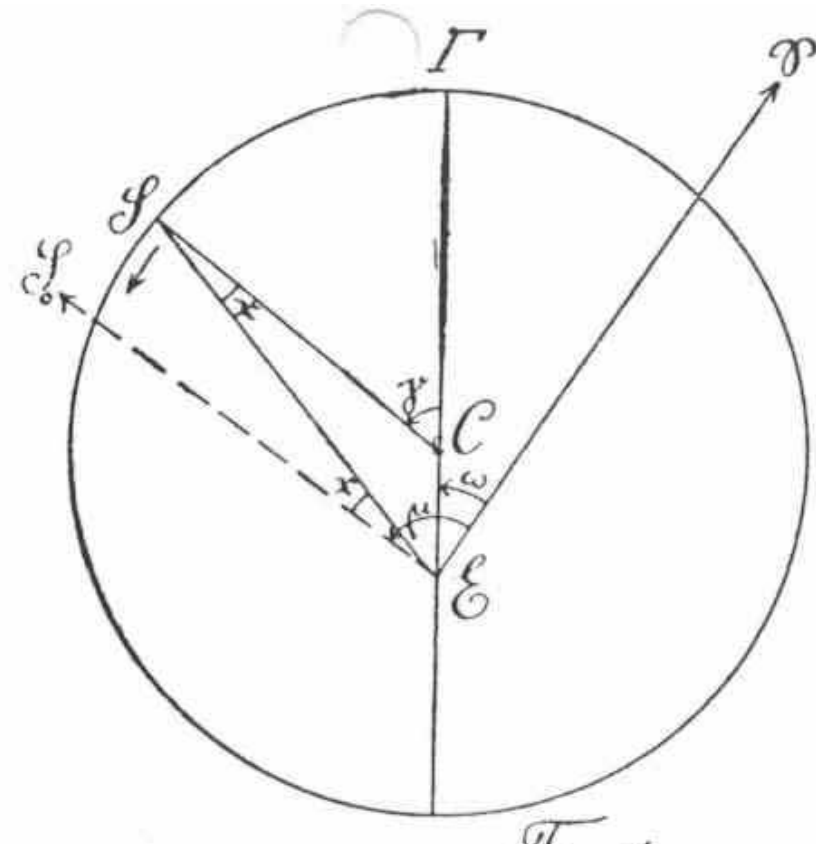
3. Astronomische Tafeln

Exzentrische Bahn der Sonne

- ω sublimatio; aux propria
- μ medialitas, medius cursus / motus; el-wazat
- $\gamma = \mu - \omega$ argumentum; el-heza
- x aequatio, examen; tadil (mit γ in Tabelle)
- $l = \mu + x$ (x neg.) ekliptikale Länge der Sonne



(Deutsche Sphaera, Cgm 156, 28r
aus Brévar 1980, 161)



(Wegener, Alfonsinische Tafeln, 1905, Fig. 1)

3. Astronomische Tafeln

Mittlere Bewegung der Sonne nach Tagen (**medialitas solis**)

Tabuliert sind:

- numerus dierum
- numerus horarum / minutarum
- μ **medius cursus solis** ad dies mensium etc.
- in signa (30°), gradus, minuta und secunda

nu mer die ruo	me so me Siga	DL lu H Gd	vf ad Si min	CVRS dies voj seda
1	T	T	9 9	8 1
2	T	T	9 8	8 2
3	T	T	9 7	8 3
4	T	T	9 6	8 4
5	T	T	9 5	8 5
6	T	T	9 4	8 6
7	T	T	9 3	8 7
8	T	T	9 2	8 8
9	T	T	9 1	8 9
10	T	T	9 0	9 0
11	T	0	8 9	9 1
12	T	1	8 8	9 2
13	T	1	8 7	9 3
14	T	1	8 6	9 4
15	T	1	8 5	9 5
16	T	1	8 4	9 6
17	T	1	8 3	9 7
18	T	1	8 2	9 8
19	T	1	8 1	9 9
20	T	1	8 0	10 0
21	T	1	7 59	10 1
22	T	1	7 58	10 2
23	T	1	7 57	10 3
24	T	1	7 56	10 4
25	T	1	7 55	10 5
26	T	1	7 54	10 6
27	T	1	7 53	10 7
28	T	1	7 52	10 8
29	T	1	7 51	10 9
30	T	1	7 50	11 0

(Clm 13021, 34r)

konstanter Winkel pro Tag: 59' 8-9"
wird korrigiert durch die aequatio solis

3. Astronomische Tafeln

Ausgleichswerte der Sonne (aequatio solis)

Tabuliert sind:

γ argumentum; el-heza

x **aequatio**, examinatio; tadil

beide in signa (30°), gradus,
minuta und secunda

The image shows two pages from a medieval manuscript, likely a table of astronomical data. The left page is titled 'Tabula Numeri' and 'Equatio Solis'. The right page is titled 'Tabvlla Nv' and 'Equatio sol'. Both tables contain columns of numbers in a medieval script, representing astronomical data. The tables are arranged in a grid-like format with multiple columns and rows of numbers.

(Clm 13021, 35r)

$$x(180^\circ - \gamma) = x(180^\circ + \gamma)$$

x minimal ($0^\circ 0' 0''$) für $\gamma = 180^\circ$ (6 signa, 0°)

x maximal ($1^\circ 59' 10''$) für $\gamma = 90^\circ 1'$ (3 signa $1'$)

Die arithmetischen Algorithmen im Algorismus von al-Khwarizmi *Liber ysagogarum* Die Regensburg-Prüfeninge Fassung einer mittelalterlichen Einführung in das Rechnen mit arabischen Zahlen

1. Grundlagen

1.1 Algorismus-Traktate des 12. und 13. Jahrhunderts

1.2 Ziffernformen

1.3 Der *Liber ysagogarum Alchorismi*

2. Ganze Zahlen

2.1 Darstellung und Arten

2.2 Multiplikation

2.3 Division

3. Brüche

3.1 Römische Brüche

3.2 Sexagesimalbrüche

3.3 Allgemeine Brüche: *minutiae diversorum generum/ordinum*

4. Quadratwurzeln

4.1 Ganzzahlige Quadratwurzeln

4.2 Ganzzahlige Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen

4.3 Quadratwurzeln aus Sexagesimalbrüchen

4.4 Sexagesimale Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen

4.5 Quadratwurzeln aus gemischten allgemeinen Brüchen

5. Zusammenfassung

1. Grundlagen

700-800	Aufbau großräumiger interkultureller Kontakte	768 Kalifen in Bagdad (al-Mansur, al-Raschid): arab., syr., ind. Ärzte; Alkuin (Karl d. Gr.)
800-900	griech.-syr.-arabische Übersetzungen (syrische Christen), erste Rezeption im arabischen Kulturraum	813-833 al-Mamun erhält Handschriften aus Konstantinopel -873 Honein ben Ishak 780-850 al-Khwarizmi
900-1000	Weiterdenken im arabischen Kulturraum; Kontakte zum christlich-römischen Europa	945-1003 Gerbert v. Aurillac <i>Regula de abaco computi</i> , <i>De numerorum divisione</i>
1000-1100	Weiterdenken im arabischen Kulturraum; Rezeption lateinischer Quellen (Boethius) im christlich-römischen Europa	Avicenna, al-Ghazzali al-Biruni (Astronomie) Alhazen (Optik); Hermannus Contractus Otloh von St. Emmeram Wilhelm von Hirsau
1100-1200	arab.-lat. Übersetzungen griechischer Quellen im islamischen Westen; Rezeption im christlich-römischen Europa; islamischer Osten nicht aktiv (Kreuzzüge ab 1095)	-1142 Adelhard von Bath -1153 Joh. Hispalensis und Gundisalvo: <i>Liber algorismi</i> -1187 Gerhard von Cremona , Übersetzerschule von Toledo 1109 R-Prüfung gegründet 1163-1168 Clm 13021
1200-1300	Rezeption und Weiterdenken im christlichen Europa ; islamischer Westen nicht aktiv (Reconquista: 1236 Cord., 1248 Sevilla) 1258 Mongolen > Bagdad	-1240 Leonardo Fibonacci: 1202 <i>Liber abaci</i> -1240 Alexandre de Villa Dei: <i>Carmen de Algorismo</i> -1256 Joh. v. Sacrobosco : <i>Algorismus vulgaris</i>

1.1 Algorithmus-Traktate des 12. und 13. Jh.

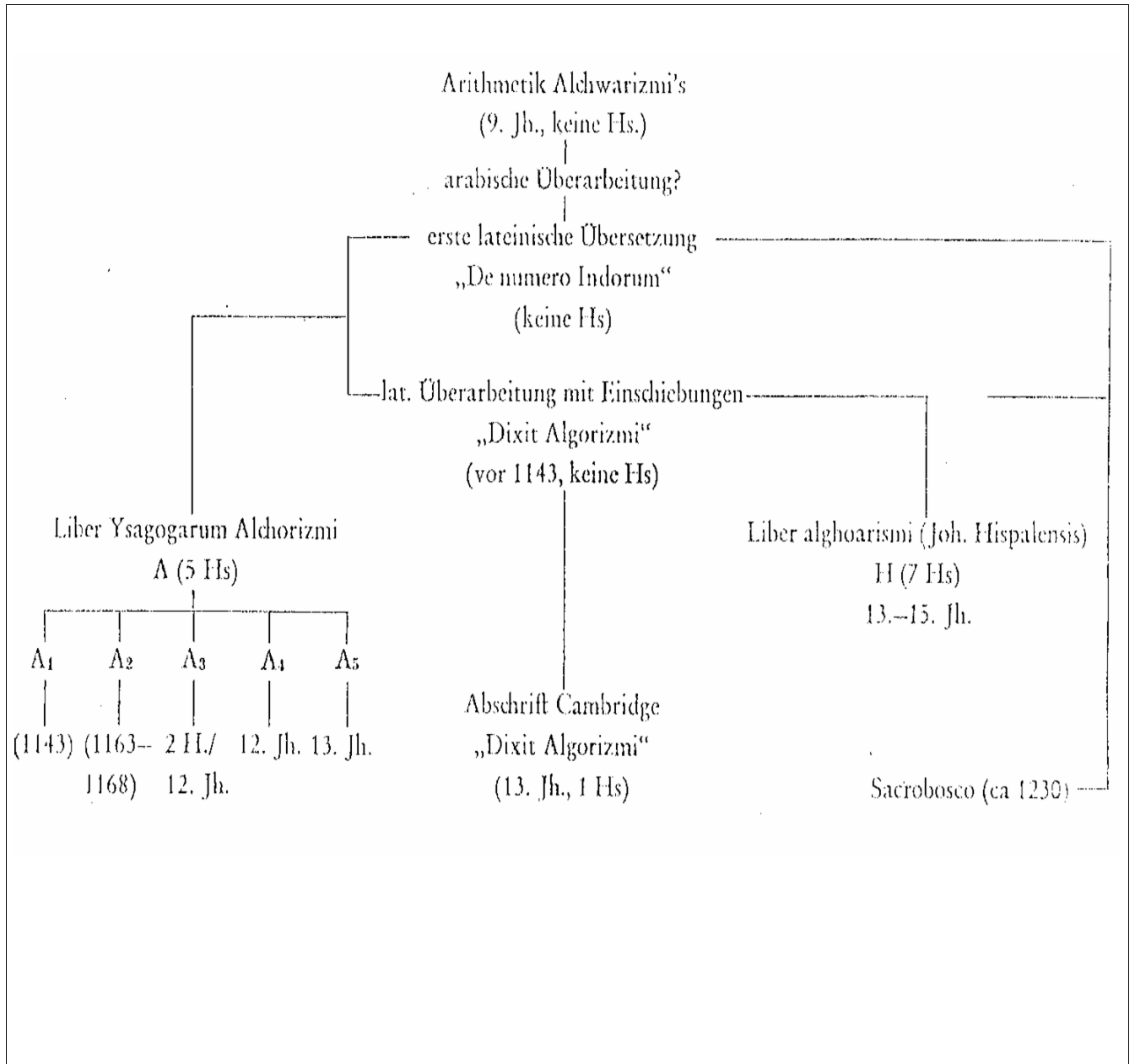


Abb. 1: Überlieferung von Algorismus-Traktaten
A1 Wien, Cod. Vind. 275; Süddt., später Reichenbach
A2 München, Clm 13021; Regensburg-Prüfening
A3 Paris, Cod.Paris. lat. 16208; Südfr. oder Bologna (?)
A4 Mailand, Cod. Ambr. A 3 sup.; ?
A5 München, Clm 18927; Tegernsee
(Vogel, Alchwarizmis Algorismus, 1963: 44)

1.1 Algorismus-Traktate des 12. und 13. Jh.

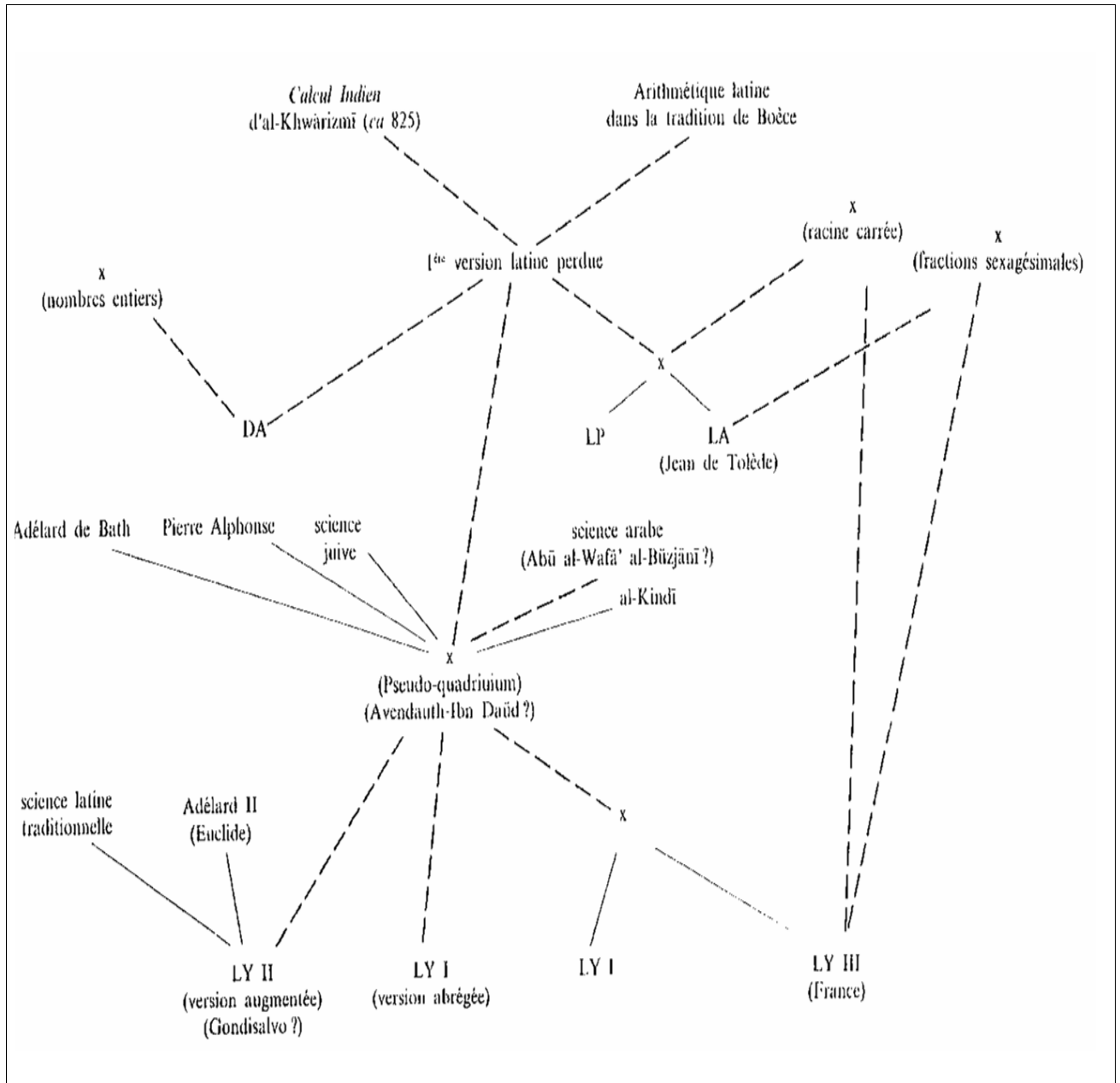


Abb. 2: Überlieferung von Algorismus-Traktaten

DA Dixit Algorizmi

LP Liber pulveris

LA Liber Alchorismi (Joh. Hisp.)

LY Liber ysagogarum

LY (I): Cod. Vind. 275

LY I: Clm 13021

LY II: Cod. Paris. lat. 16208 (Mag. A)

LY III: Clm 18927

(Allard, *Le calcul indien*, 1992: XXVII)

1.2 Ziffernformen

D. Tafel der Zifferformen										
gezeichnet von H. Rosenfeld										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
A 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
A 2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
A 3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
A 4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
A 5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
DA	1	2	3	4						0
H	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Vig	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Sal	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Tol	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Ind	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

A 1 Nationalbibliothek Wien, Cod. Vind. 275.
A 2 Bayer. Staatsbibl., Clm. 15021.
A 3 Bibl. Nat., Paris, Cod. Paris. 16208.
A 4 Bibl. Ambrosiana, Mailand, Cod. Amb. A 3 sup.
A 5 Bayer. Staatsbibl., Clm. 18927.
DA Univ. Bibl. Cambridge, Cod. ms. J1 6. 5.
H die aufgeführten Ziffern sind H₁ und H₄ entnommen
(zu H₁—H₄: vgl. S. 43, Anm. 11)
Vig San Lorenzo del Escorial, Cod. Vigilanus (anno 976).
Sal Univ. Bibl. Heidelberg, Kloster Salem 4² Schr. IX, Nr. 23.
Tol Bayer. Staatsbibl., Clm. 18927, fig. Toletane
Ind Bayer. Staatsbibl. Clm. 18927, fig. Indica.

Abb. 3: Ziffernformen
(Vogel, Alchwarizmis Algorismus, 1963: 51)

1.2 Ziffernformen

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
Cantabr. li.VI.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	D.A. Liber ysagogarum
Vindob.lat. 275	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
Monac.lat. 18927	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
Monac.lat. 13021	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
Genuens. E.III.28	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
Mediol.Ambr. A 3 sup.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
Paris.lat. 16208	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
Oxon.Bodl. Lyell 52	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
Admont. fr. 4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
Oxon.Bodl. Selden sup.26	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	Liber pueris
Mediol.Ambr. M 28 sup.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
Oxon.Bodl. Lyell 52	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
Vatic.Reg.lat. 1285	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
Paris.lat. 7359	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	Liber Alchorismi
Paris.lat. 15461	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
Paris.Mazar. 3642	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
Paris.lat. 16202	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
Amplon. Qu 355	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
Dresd. C 80	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
Salmant.Univ. 2338	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
Vatic.Palat.lat. 1393	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
'Toletane figure'	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	Monac. 18927
'Indice figure'	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
(Tables astronomiques)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	

Abb. 4: Ziffernformen
(Allard, Le calcul indien, 1992: 252)

1.3 Aufbau des Algorithmus **im *Liber ysagogarum* des Clm 13021**

1. Ganze Zahlen – de integris numeris: 27ra-28ra

de multiplicatione primae speciei [1-9: digiti]
de multiplicatione secundae speciei [durch 10 teilbar: articuli]
de multiplicatione tertiae speciei [beliebige Zahlen: compositi]
de probatione multiplicationis
de additione
de diminutione integrorum
de mediatione integrorum
de duplicatione
de probatione duplicationis
de divisione integrorum
de probatione divisionis

2. Brüche – de minutiarum notis: 28ra-28vb

de multiplicatione minutiarum [Sexagesimalbrüche]
de multiplicatione integrorum per minutias
de divisione minutiarum
de constitutione integrorum et minutiarum [Darstellung]
de additione minutiarum
de diminutione minutiarum
de duplicatione et mediatione minutiarum
de multiplicatione minutiarum diversorum generum
[Brüche mit beliebigen Nennern]
de multiplicatione integrorum et minutiarum div. generum
de divisione minutiarum diversorum generum

3. Quadratwurzeln – de inventione radices: 29ra-29va

de inventione radices integrorum
de inventione radices minutiarum
de inventione radices integrorum et minutiarum div. ordinum
Item alia regula de inventione radices

2. Ganze Zahlen – Terminologie

Ziffer	<i>figura</i>
Null	<i>ciffra, circulus, ni(c)hil</i>
Zahldarstellung mit Ziffern	<i>constitutio, descriptio, positio</i>
Ziffernfolge	<i>dispositio, ordo</i>
Stelle(nwert) einer Ziffer	<i>differentia, denominatio</i>
ganze Zahl	<i>numerus, integer (numerus)</i>
Eins	<i>gradus, unitas</i>
Zahlen 1 – 9	<i>digiti</i>
durch 10 teilbare Zahlen	<i>articuli</i>
aus <i>dig.</i> und <i>art.</i> zus.ges.	<i>compositi</i>
als Resultat ergeben	<i>efficere, fieri, generare</i>
als Resultat herauskommen	<i>evenire, excrescere, exire, nasci, occurrere, oriri, progredi, (con)surgere</i>
Resultat	<i>summa (auch bei Multiplikation)</i>
Addition	<i>additio, augmentatio</i>
addieren	<i>addere, aggregare, colligere, congregare, copulare, numerare cum</i>
übertragen	<i>sublevare, transferre</i>
Subtraktion	<i>diminutio</i>
subtrahieren	<i>aufferre, (decrescere,) demere, (di)minuere, semovere, sufferre</i>
Duplikation	<i>duplicatio, geminatio</i>
Halbierung	<i>mediatio</i>
Multiplikation	<i>collatio, multiplicatio</i>
multiplizieren	<i>conferre, ducere in/inter/per, multiplicare</i>
dividieren	<i>dividere in, partiri</i>
Divisionsrest	<i>nota, reliquum, reliquus (numerus), residuus (numerus), superfluous (numerus)</i>

2.1 Darstellung und Arten ganzer Zahlen

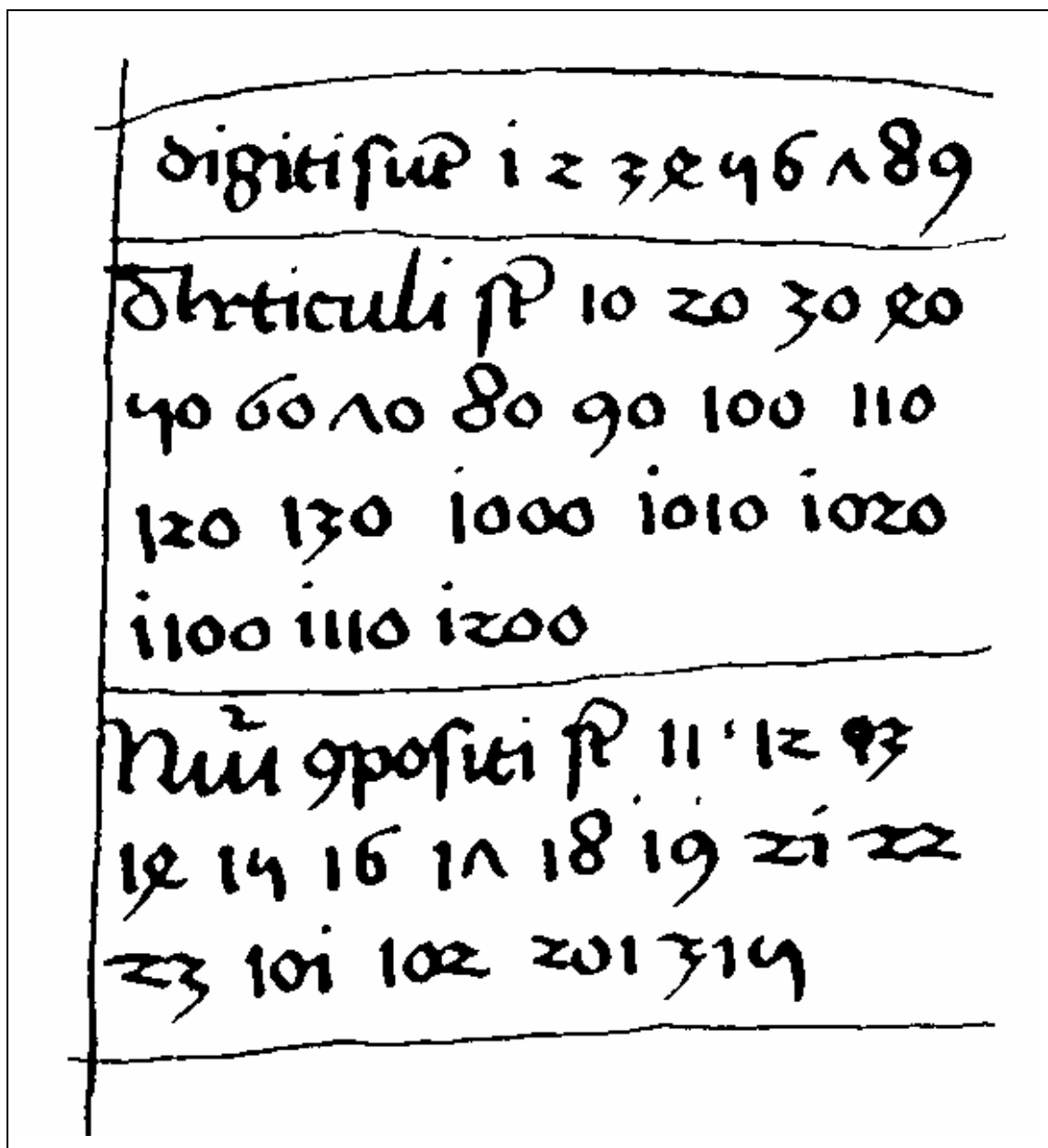


Abb. 5: *digiti, articuli, compositi*
14. Jh. StaBiM (Menninger 1958: II 8)

2.1 Darstellung und Arten ganzer Zahlen

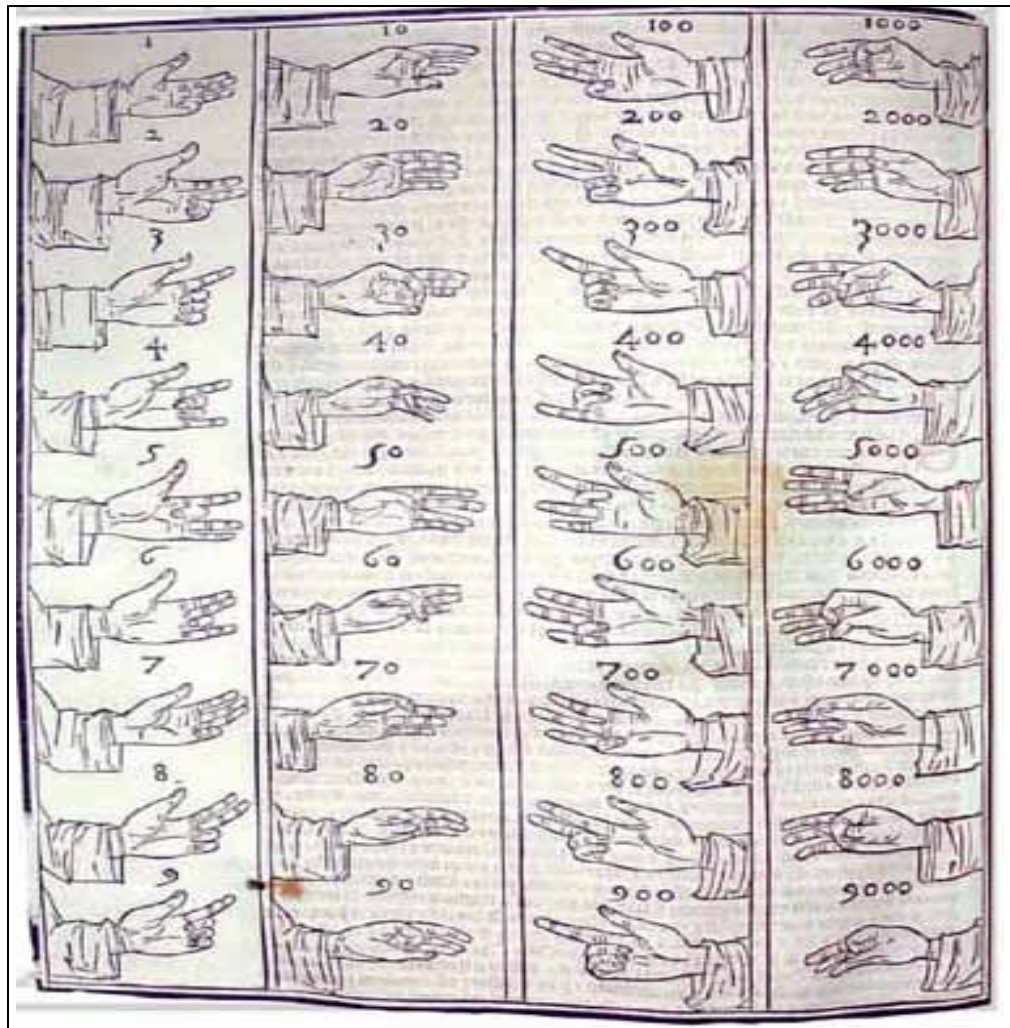


Abb.: **Fingerzahlen des Beda Venerabilis (673-735)**
(Luca Pacioli, *Summa* 1494; Menninger 1934: 142)



Grab Bedas in der Kathedrale von Durham

2.2 Multiplikation

I	Semel unū. unū ē. 1 unū dignū	6	¶ nouem .xxv. duo articuli 1 duo dignū.
O	Semel duo. duo s̄. 1 duo dignū s̄.	9	Quā quā faciunt .xvi. vi. dig 1 unū artic.
S	Semel tres s̄. tres s̄. 1.iii. dignū s̄.	9	Quā qm̄ fac̄ .xx. duo articuli.
9	Semel quātor. quātor s̄. 1 quātor ^{dignū s̄.}	14	Quā sem̄ fac̄ .ciii. duo artic 1 unū dig
9	Semel qnq; .v. s̄. 1 qnq; dignū s̄.	14	Quā septem fac̄ .xxviii. duo artic ^{dignū.} 1 viii.
7	Semel sex .vi. s̄. 1. vi. dig s̄.	8	Quā octom .xxxii. tres artic 1 duo dig.
1	Semel .vii. vii. s̄. 1. vii. dig s̄.	6	Quā nouem .xxvii. iii. artic 1 vi. dig.
8	Semel octo .viii. s̄. 1. viii. dig s̄.	9	Quāq; qm̄ .xxv. ii. artic 1 v. dignū.
6	Semel nouē .viiii. s̄. 1. vii. dig s̄.	9	Quāq; sem̄ .xxx. iii. articuli.
6	Bis b̄u faciunt .iiii. 1.iiii. dig s̄.	14	Quāq; septem .xxv. iii. artic 1 v. dig.
9	Bis tri faciunt .vi. 1. vi. s̄ dignū.	8	Quāq; octom .xl. iii. articuli.
9	Bis quā faciunt octo .viii. s̄ dignū.	6	Quāq; nouem .xlv. iii. artic 1 v. dig.
9	Bis qm̄ faciunt .x. unū articulū .x.	14	Sextes sem̄ .xxxvi. iii. artic 1. vi. dig.
14	Bis sem̄ faciunt .xii. unū dig 1 unū articulū.	14	Sextes septem .xlii. iii. artic 1. ii. dig.
14	Bis septem faciunt .xiiii. unū dig s̄ 1 x. unū articulū.	8	Sextes octom .xlviii. iii. artic 1 viii. dig.
8	Bis octom faciunt .xvi. sex dig. 1 unū articulū.	6	Sextes nouem .l. iii. v. artic 1. iii. dig.
6	Bis nouem faciunt .xviii. viii. dig 1 unū articulū.	14	Septes septem .xlviii. iii. artic 1 viii. dig.
14	Ter tri faciunt .viii. viii. s̄ dignū.	8	Septes octom .lvi. v. artic 1. vi. dig.
9	Ter quā faciunt .xii. duo dig 1 x. unū articulū ē.	6	Septes nouem .lxi. vi. artic 1. iii. dig.
9	Ter qm̄ faciunt .xv. v. dignū 1 unū articulū.	8	Octes octom .lxxiii. vi. artic 1. iii. dig.
14	Ter sem̄ .x. 1. viii. octo dig 1 unū articulū.	6	Octes nouem .lxxv. vii. artic 1. ii. dig.
14	Ter septem .xxi. duo articuli 1 unū dig.	6	Homines nouem .lxxx. octo artic 1. iii. dig.
8	Ter octom .xxiiii. duo articuli 1. iii. dignū.		

Menninger II 136: Clm 14137, 113r (Otloh von St. Emmeram)

2.2 Multiplikation

F									
D	1	2							
B	2	2	F						
A	F	5	9	2					
G	2	8	12	16	9				
F	4	10	14	20	24	6			
D	5	12	18	24	30	35	7		
C	7	14	21	28	35	42	49	8	
B	3	16	24	32	40	48	56	64	9
J	9	18	27	36	45	54	63	72	81

1	2				
2	4	3			
3	6	9	4		
4	8	12	16	5	
.....

Eine Einmaleins-Tafel von 1 × 1 bis 9 × 9 aus einer der ältesten deutschen Algorithmus-Handschriften, 12. Jahrhundert (Q 116).

... et ad scientiam utilis...

Semel. i.	cūputandis dignitate abas		
Bis. ii.	.		
Bis. iii.	Ter. iii.		
.vi.	viii.		
Bis.iiii.	Ter.iiii.	Quar.iii.	
viii.	xii.	xvi.	
Bis.v.	Ter.v.	Quar.v.	Quinq.v.
.x.	xv.	.xx.	xx.v.

ma. q. ad scientia uti

i	ii	iii	v.
ii	iiii	vi	x
iii	vii	viii	xv
iiii	viii	ix	xx
v	x	xv	xxv
vi	xi	xvii	xxx

Zwei Einmaleins-Tafeln (Anfang) aus Klosterhandschriften des 13. Jahrhunderts.

Semel 1-, bis 2-, ter 3-mal usw. Beide noch ganz 'römisch'. Über der zweiten: „... et ad scientiam utilis...“ — „und zur Wissenschaft äußerst nützlich...“ Reizvoll ist der Vergleich mit Einmaleinstafeln anderer Zeiten und Völker (vgl. Sachweiser). Staatsbibliothek, München.

Menninger II 239 (1143 Cod. Vind. 275, 27r [Nagl 1889]) und 863

2.2 Multiplikation

1	2								
2	4	6							
3	6	9	12						
4	8	12	16	20					
5	10	15	20	25	30				
6	12	18	24	30	36	42			
7	14	21	28	35	42	49	56		
8	16	24	32	40	48	56	64	72	
9	18	27	36	45	54	63	72	81	

Abb. 6: Einmaleins-Tafel (CIm 13021, 27rb)

Multiplizieren.

Beyßet vil machen/vnnd leret wie man ein
zal mit jr/oder einer andern vilfeltigen sol/vnd
du mußt für allen dingen/das ein mal ein wol
wissen/vnd außwendig lernen wie hie:

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Adam Ries 1525, 11-12

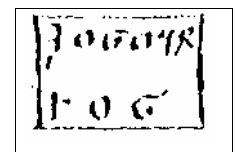
2.2.2 Multiplikation von *compositi*

multiplicans, -tor
multiplicandus

1024
306

$$1 \cdot 306 = 306$$

306...
1024
306

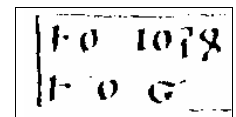


306024

Multiplikand nach rechts

$$0 \cdot 306 = 0$$

3060..
1024
306



306024

Multiplikand nach rechts

$$2 \cdot 306$$

$$2 \cdot 3 = 6 \mid + 06 = 12$$

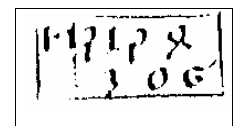
3120..
1024
306

312024

$$2 \cdot 0 = 0$$

$$2 \cdot 6 = 12 \mid + 0. = 12$$

31212..
1024
306



312124

Multiplikand nach rechts

$$4 \cdot 306$$

$$4 \cdot 3 = 12 \mid + 21 = 33$$

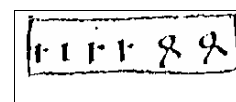
31332..
1024
306

313324

$$4 \cdot 0 = 0$$

$$4 \cdot 6 = 24 \mid + 2. = 44$$

313344
306



2.3 Division ganzer Zahlen

dividendus
dividens, divisor

$$2 : 2 = 1$$

$$25 : 24 > 1$$

$$25 - 1 \cdot 24$$

$$2 - 1 \cdot 2 = 0$$

$$5 - 1 \cdot 4 = 1$$

Divisor nach rechts

$$19 : 24 = 0$$

Divisor nach rechts

$$19 : 2 > 9,$$

$$\text{aber } 192 : 24 < 9, \text{ also } 8$$

$$192 - 8 \cdot 24$$

$$19 - 8 \cdot 2 = 3$$

$$32 - 8 \cdot 4 = 0$$

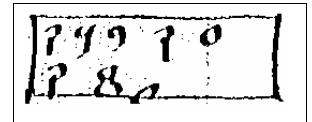
Divisor nach rechts

$$0 : 24 = 0$$

Ergebnis: **1080**

$$25920$$

$$24$$



$$1$$

$$25920$$

$$24$$

$$1$$

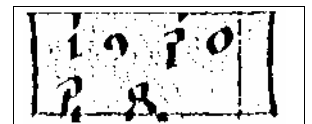
$$1920$$

$$24$$

$$10$$

$$1920$$

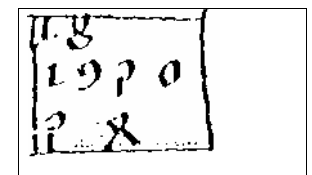
$$24$$



$$108$$

$$1920$$

$$24$$



$$108$$

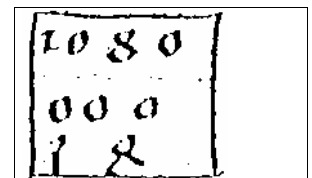
$$320$$

$$24$$

$$1080$$

$$000$$

$$24$$



3. Brüche

3.1 Römische Brüche

as 1, semis 1/2, uncia 1/12, sextula 1/72, scripulum 1/288 etc.

3.2 Sexagesimalbrüche

gradus, minutum, secundum, tertium, quartum, quintum etc.

3.3 Allgemeine Brüche – minutiae diversorum generum

Terminologie

Bruch	<i>fractio, minutia</i>
Stellenwert, Benennung, 60er-Potenz	<i>denominatio, descriptio, differentia, genus</i>
Zähler (Vielfaches eines Stammbruches)	<i>~ dividens, pars</i>
	<i>z. B. duae partes de 13, 21 pars integri divisi in 39</i>
Nenner	<i>denominatio (auch differentia)</i>

resolvieren:

Teilbrüche unter dem größten Nenner zusammenfassen
(de)ducere, resolvere, retrahere

reduzieren:

einen Bruch in Teilbrüche mit kleineren Nennern zerlegen
elevare, reducere, vertere

3.1 Römische Brüche

<u>1 As = 12 Unzen</u>			<u>Teile der Unze</u>		
X	1	As	X	1 As	1 As hat
IIII	$\frac{11}{12}$	Deunx	U, T, T	$\frac{1}{12}$ Unze	12
IIII	$\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$	Dextans	IIII, L, L	$\frac{1}{24}$ Semuncia	24
IIII	$\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$	Dodrans	UU	$\frac{1}{36}$ Duella	36
IIII	$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$	Bes, Bisse	U	$\frac{1}{72}$ Sextula	72
IIII	$\frac{7}{12}$	Septunx	*, XII	$\frac{1}{96}$ Dragma	96
IIII	$\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$	Semis	U	$\frac{1}{144}$ Dimidiasextula	144
IIII	$\frac{5}{12}$	Quincunx	IIII	$\frac{1}{288}$ Scripulus	288
IIII	$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$	Triens	IIII, U	$\frac{1}{576}$ Obolus	576
IIII	$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$	Quadrans	Z	$\frac{1}{1152}$ Cerates	1152
IIII	$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$	Sextans	IIII, IIII	$\frac{1}{1728}$ Siliqua	1728
IIII	$\frac{1}{12}$	Uncia	IIII, IIII, IIII	$\frac{1}{2304}$ Calcus	2304

Abb. 9 Bruchteile und -bezeichnungen in der römischen Antike und im Mittelalter

Abb. 7: Minutien
(Vogel, Gerbert als Mathematiker, 1985: 18)

3.1 Römische Brüche

1	2	7	8	17	18
\bar{II}	\bar{I}	\bar{V}	\bar{I}	\bar{X}	\bar{I}
\bar{IDCCC}	$DCCCC$	\bar{IID}	$DCCCC$	\bar{VIII}	$DCCCC$
\bar{IDC}	$DCCC$	\bar{III}	$DCCC$	\bar{VIII}	$DCCC$
\bar{IDCCC}	DCC	\bar{IID}	DCC	\bar{VII}	DCC
\bar{ICC}	DC	\bar{III}	DC	\bar{VI}	DC
\bar{I}	D	\bar{IID}	D	\bar{V}	D
$DCCC$	$CCCC$	\bar{II}	$CCCC$	\bar{IIII}	$CCCC$
DC	CCC	\bar{ID}	CCC	\bar{III}	CCC
$CCCC$	CC	\bar{I}	CC	\bar{II}	CC
CC	C	D	C	\bar{I}	C
$CLXXX$	LXL	$CCCCL$	LXL	$DCCCC$	LXL
CLX	$LXXX$	$CCCC$	$LXXX$	$DCCC$	$LXXX$
CXL	LXX	$CCCL$	LXX	DCC	LXX
CXX	LX	CCC	LX	DC	LX
C	L	CCL	L	D	L
$LXXX$	XL	CC	XL	$CCCC$	XL
LX	XXX	CL	XXX	CCC	XXX
XL	XX	C	XX	CC	XX
XX	X	L	X	C	X
$XVIII$	$VIII$	XLV	$VIII$	LXL	$VIII$
XVI	$VIII$	XL	$VIII$	$LXXX$	$VIII$
$XIII$	VII	$XXXV$	VII	LXX	VII
XII	VI	XXX	VI	LX	VI
X	V	XXV	V	L	V
$VIII$	III	XX	III	XL	III
VI	III	XV	III	XXX	III
III	II	X	II	XX	II
II	I	V	I	X	I
$IIII$	$IIII$	$IIII$	$IIII$	$VIIII$	$IIII$
$IIII$	$IIII$	$IIII$	$IIII$	$VIIII$	$IIII$
$IIII$	$IIII$	$IIII$	$IIII$	$VIIII$	$IIII$
$IIII$	$IIII$	$IIII$	$IIII$	$VIIII$	$IIII$
$IIII$	$IIII$	$IIII$	$IIII$	$VIIII$	$IIII$
$IIII$	$IIII$	$IIII$	$IIII$	$VIIII$	$IIII$
$IIII$	$IIII$	$IIII$	$IIII$	$VIIII$	$IIII$
$IIII$	$IIII$	$IIII$	$IIII$	$VIIII$	$IIII$
$IIII$	$IIII$	$IIII$	$IIII$	$VIIII$	$IIII$
$IIII$	$IIII$	$IIII$	$IIII$	$VIIII$	$IIII$
$IIII$	$IIII$	$IIII$	$IIII$	$VIIII$	$IIII$
$IIII$	$IIII$	$IIII$	$IIII$	$VIIII$	$IIII$
$IIII$	$IIII$	$IIII$	$IIII$	$VIIII$	$IIII$
$IIII$	$IIII$	$IIII$	$IIII$	$VIIII$	$IIII$
$IIII$	$IIII$	$IIII$	$IIII$	$VIIII$	$IIII$
$IIII$	$IIII$	$IIII$	$IIII$	$VIIII$	$IIII$
$IIII$	$IIII$	$IIII$	$IIII$	$VIIII$	$IIII$
$IIII$	$IIII$	$IIII$	$IIII$	$VIIII$	$IIII$

Abb. 8: Multiplikationstafel mit Minuten
nach **Victorius von Aquitanien** ~457
(Friedlein, *Victorii Calculus*, 1871: 447-449)

3.1 Römische Brüche

25	.i.	unna	~	seculus	3
deux	sss	semita	S	obol	~
dextal	sss	della	cu	distila	hs
dodral	ss	scala	9	cedra	x
hile	ss	scula	u	scila	th
Septu	S	druma	*	calcul	2
Senul	S	enula	φ	unna	de
Quicux	ss	ambit	H	ux	comp
trece	ss	scula	ss	mu	sic
Quat	S	stant	7	dextal	om
Sevul	S	7	dodral	trece	7
Sevul	S	7	hile	quicux	7
Sevul	S	7	septu	7	ad
unna	S	7	seml	7	aliam

et doctri na.

Abb. 9: Minutiendarstellung (Cod. Paris. lat. 16208, 68vb)

3.2 Sexagesimalbrüche

The top table shows the multiplication of $\frac{1}{60}$ by powers of 60. The rows represent the multiplier (1, 60, 60^2, ..., 60^10) and the columns represent the result. The symbols used are: 1 (top-left), 60 (top row), 60^2 (second row), 60^3 (third row), 60^4 (fourth row), 60^5 (fifth row), 60^6 (sixth row), 60^7 (seventh row), 60^8 (eighth row), 60^9 (ninth row), and 60^10 (tenth row).

The bottom table shows the multiplication of $\frac{1}{60}$ by powers of 60. The rows represent the multiplier (1, 60, 60^2, ..., 60^10) and the columns represent the result. The symbols used are: 1 (top-left), 60 (top row), 60^2 (second row), 60^3 (third row), 60^4 (fourth row), 60^5 (fifth row), 60^6 (sixth row), 60^7 (seventh row), 60^8 (eighth row), 60^9 (ninth row), and 60^10 (tenth row).

Abb. 10: Tafeln zur **Multiplikation von Sexagesimalbrüchen durch Addition der Exponenten** (cf. Cappelli 422 zu 12)

$$\text{z. B. } (1/60)^2 \cdot (1/60)^3 = (1/60)^{2+3} = (1/60)^5$$

(Clm 13021, 28ra; Cod. Paris. lat. 16208, 68vb)

3.2.3 Multiplikation von Sexagesimalbrüchen

Sint quoque verbi gratia

2 gradus et 45 minuta, quae per

3 gradus et 10 minuta ac 30 secunda ducantur.

*Sunt q̄ uerbi gra 2 gradus & 45 minuta q̄ p̄ 3
gradus & 10 m̄ta hac 30 sc̄da ducat̄*

$$2^{\circ} 45' \cdot 3^{\circ} 10' 30''$$

resolvieren

$$2^{\circ} 45' = 2 \cdot 60' + 45' = 165'$$

$$3^{\circ} 10' 30'' =$$

$$3 \cdot 60 \cdot 60'' + 10 \cdot 60'' + 30'' = 11430''$$

multiplizieren

$$165' \cdot 11430'' = 1885950'''$$

reduzieren

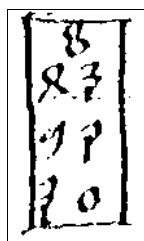
$$1885950''' = 1885950'' : 60 = 31432'' 30'''$$

$$31432'' = 31432' : 60 = 523' 52''$$

$$532' = 532 : 60 = 8^{\circ} 43'$$

Ergebnis

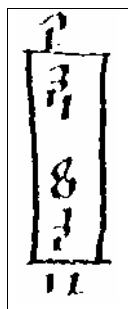
$$8^{\circ} 43' 52'' 30'''$$



3.3.1 Multiplikation allgemeiner Brüche

3 et dimidium per 8 et 3 undecimos ducere

$$3 \frac{1}{2} \cdot 8 \frac{3}{11}$$



resolvieren

$$3 \frac{1}{2} = \frac{7}{2}, \quad \text{da } 2 \cdot 3 = 6 \mid + 1 = 7$$

$$8 \frac{3}{11} = \frac{91}{11}, \quad \text{da } 11 \cdot 8 = 88 \mid + 3 = 91$$

multiplizieren

$$\begin{array}{l} \text{Zähler} \cdot \text{Zähler: } 7 \cdot 91 = 637 \\ \text{Nenner} \cdot \text{Nenner: } 2 \cdot 11 = \mathbf{22} \end{array}$$

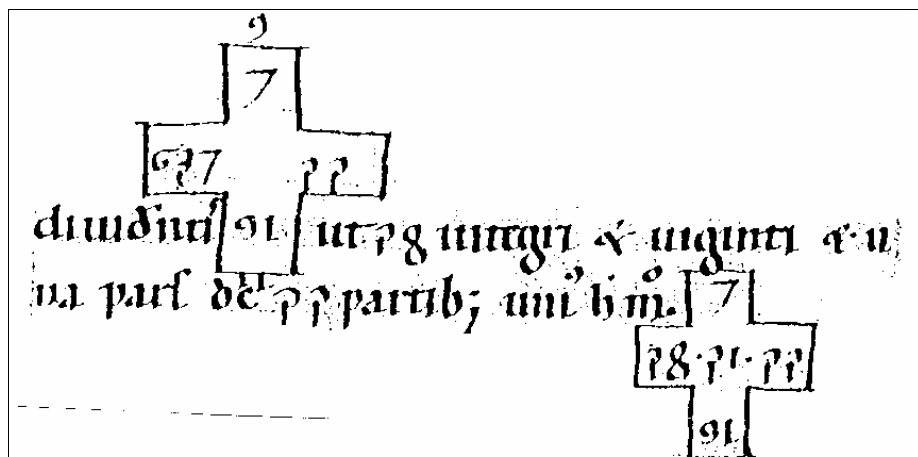
reduzieren

$$637 : \mathbf{22} =$$

$$\mathbf{28} \text{ Rest } \mathbf{21}$$

Ergebnis

$$\mathbf{28} \mathbf{21/22}$$



*Qui numerus de divisione excreverit,
integer erit,
residuum vero partes erunt dividendis,
ut 28 integri et
viginti et una pars de 22 partibus unius
hoc modo*

3.3.2 Division allgemeiner Brüche

20 et duas partes ex 13 per 3 et tertiam

$$20 \frac{2}{13} : 3 \frac{1}{3}$$

kleinstes gemeinsames Vielfaches der Nenner
 $3 \cdot 13 = 39$

Wie viele 39stel sind $20 \frac{2}{13}$?

$$20 \cdot 39 = 780 \quad | \quad + 6 = 786$$

weil das Verhältnis $2 : 13 = (3 \cdot 2) : 39$

Wie viele 39stel sind $3 \frac{1}{3}$?

$$3 \cdot 39 = 117 \quad | \quad + 13 = 130$$

weil das Verhältnis $1 : 3 = 13 : 39$

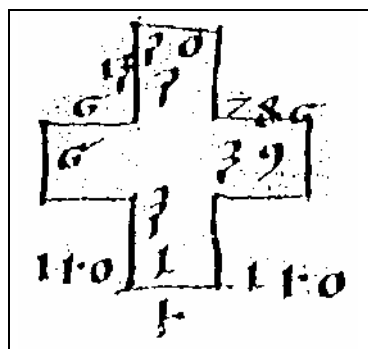
also

$$20 \frac{2}{13} : 3 \frac{1}{3} =$$
$$786/39 : 130/39 =$$
$$786 : 130$$

dividieren

$$786 : 130 = 6 \text{ Rest } 6$$

$$\text{Ergebnis: } 6 \frac{6}{130}$$



4. Quadratwurzeln – *radices*

ziehen

extrahere, invenire

4.1 Ganzzahlige Quadratwurzeln

4.1.1 Produkte ganzzahlig radizierbarer Zahlen sind ganzzahlig radizierbar

4.1.2 Eigentümliche Quotientenregel

Si duorum ad invicem dividendorum denominatio radicem habuerit, et eorum in se summa [29ra].

Wenn von zwei wechselseitig dividierten Zahlen der Nenner jeweils eine Wurzel hat, dann auch deren Produkt.

► bei Allard verständnislos übersetzt [51]

Wenn zwei Zahlen (ab^2 und ac^2) sich in einem Bruch so kürzen lassen,

dass Zähler und Nenner eine ganzzahlige Wurzel haben (b und c), dann hat das Produkt der beiden Zahlen ebenfalls eine ganzzahlige Wurzel: $\sqrt{ab^2ac^2} = abc$.

Beispiel (18 und 8): $18/8 = 9/4$ und $8/18 = 4/9$ beide mit ganzzahlig radizierbarem Nenner, also $\sqrt{18 \cdot 8} = \sqrt{144} = 12$ ganzzahlig

4.1.3 Geradzahlige Zehnerpotenzen sind ganzzahlig radizierbar

ungerade *differentiae* (gerade Exponenten): 1, 100 etc.

4.1.4 Sexagesimalbrüche mit geradzahligen Exponenten sind ganzzahlig radizierbar

gerade *differentiae* der *minutiae*: *secunda, quarta, sexta* usw.

4.2 Ganzzahlige Wurzeln aus ganzen Zahlen

heute: $\sqrt{5625} = 75$

$$\begin{array}{r} 49 \\ 725 \\ 725 \\ 0 \end{array} \quad [7 \cdot 2 = 14] \quad 145 \cdot 5$$

$$\underline{7} \cdot \underline{7} = 49 < 56$$

$$56 - 7 \cdot 7 = 7$$

$$7 \cdot 2 = 14$$

$$14\underline{5} \cdot \underline{5} \leq 725$$

$$\begin{array}{r} 725 - 145 \cdot 5 \\ 7 - 1 \cdot 5 = 2 \end{array}$$

$$22 - 4 \cdot 5 = 2$$

$$25 - 5 \cdot 5 = 0$$

Ergebnis: 75

5625

5625
7

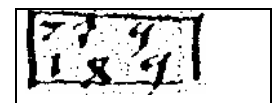
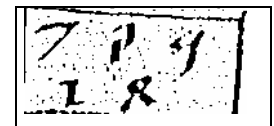
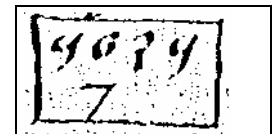
725
7

725
14

725
145

225
145

25
145



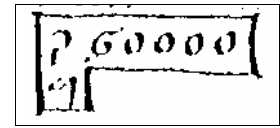
4.4 Sexagesimale Wurzeln aus ganzen Zahlen

$$\sqrt{26}$$

$$\underline{5} \cdot \underline{5} = 25 < 26$$

260000

260000
5



$$26 - 5 \cdot 5 = 1$$

10000
5

nicht in Hs.

$$5 \cdot 2 = 10$$

$$10\underline{0} \cdot \underline{0} = 0$$

$$[101 \cdot 1 > 100]$$

$$50 \cdot 2 = 100$$

$$100\underline{9} \cdot \underline{9} = 9081$$

$$10000 - 9081 = 919$$

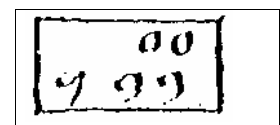
919
1009

verwerfen

Ergebnis: $\sqrt{260000} \approx 509$

halbe Zahl
der angefügten Nullen

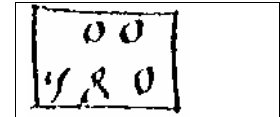
00
509



$$5 \text{ Ganze; } 9 \cdot 60 = 540$$

$$[9/100 = 5,40/60]$$

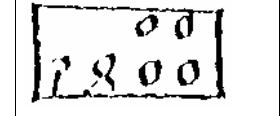
00
540



$$5 \text{ minuta; } 40 \cdot 60 = 2400$$

$$[0,40/60 = 24,00/3600]$$

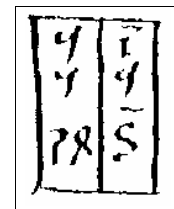
00
2400



24 *secunda* glatt

Ergebnis

$$\sqrt{26} \approx 5^\circ 5' 24''$$



4.5 Wurzeln aus allgemeinen Brüchen

radix duorum tertiaeve ac tertiae decimae

$$\sqrt{2 \frac{1}{3} \frac{1}{13}}$$

resolvieren

gewissermaßen zu *minuta* machen
gemeinsamer Nenner 39

$$2 \frac{1}{3} \frac{1}{13} = \frac{78}{39} + \frac{13}{39} + \frac{3}{39} = \frac{94}{39}$$

gewissermaßen zu *secunda* machen,
um die Wurzel ziehen zu können

$$\frac{94}{39} = \frac{(94 \cdot 39)}{39^2} = \frac{3666}{39^2}$$

radizieren

zerlegen: $3666 = 3600 + 66$

$$\sqrt{\frac{3600}{39^2}} = \frac{60}{39} \text{ „minuta“}$$

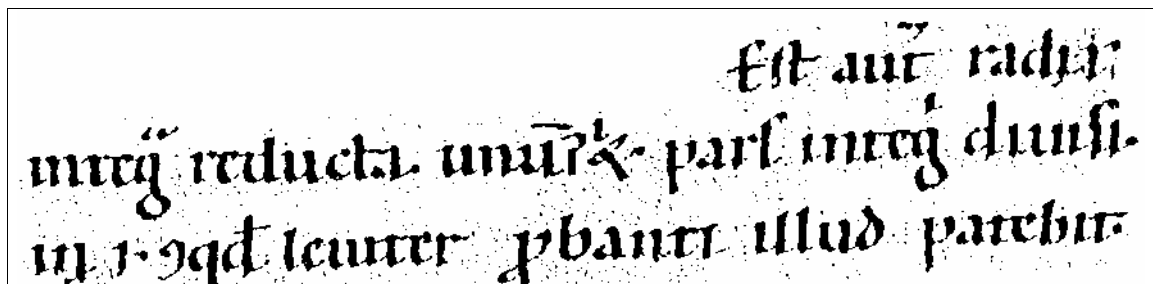
60 tricesimae nonae partes unius

Rest $\frac{66}{39^2}$ „*secunda*“

reduzieren

$$\frac{60}{39} = 1 \frac{21}{39}$$

*Est autem radix [ad] integra reducta
unum et 21 pars integri divisi in 39
quod leviter probanti illud patebit.*



*Est autem radix
integra reducta unum et 21 pars integri divisi
in 39 quod leviter probanti illud patebit.*

5. Zusammenfassung

1. **Algorithmen** sind teilweise sehr aufwändig und zeitraubend.
2. **Rechenproben**
Neunerprobe beim Multiplizieren und Duplizieren
Ausmultiplizieren bei der Division
3. Zwei Arten von **Brüchen** konkurrieren: allgemeine und sexagesimale. Die römischen sind im 12. Jahrhundert selten.
4. Formale Darstellung allgemeiner Brüche fehlt (Rechenkreuz statt **Bruchstrich**).
5. **Dezimalbruchdarstellung** (Dezimalkomma und Nachkommastellen) scheinen nur in einer ersten Idee beim Wurzelziehen auf (Verlängerung um 00-Paare).
6. Der Gedanke an **Exponenten** der Zahl 10 ist implizit vorhanden – assoziiert an Ziffernpositionen, die von rechts gezählt werden. Er wird deutlich beim Wurzelziehen:
 - ganze Zahlen mit ungeradzahlig vielen *differentiae* (1, 100, 10000 etc.) und
 - gerade *differentiae* der *minutiae* (*secunda, quarta, sexta* etc.)und bei der Sexagesimalbruch-Multiplikation, die mit der „Exponentenaddition“ auch eine erste Idee logarithmischen Rechnens zeigt.
7. Formale und natürlichsprachliche **Darstellungen** sowie Beispiele finden sich im gleichen Text nebeneinander. Zu jeder Rechenvorschrift wird nur ein Beispiel genannt.
8. Weglassen von **Nebenrechnungen** wie in moderner mathematischer Forschungsliteratur:
quod leviter probanti illud patebit [29 ra]

6. Literaturverzeichnis

Allard, André: Le calcul indien: Algorismus. Histoire des textes, éd. crit., trad. et comm. des plus anciennes versions latines du 12e siècle issues de l'arithmétique d'al-Khwârizmî. Paris: Blanchard 1992

Allard, André: Les plus anciennes versions latines du 12e siècle issues de l'arithmétique d'al-Khwârizmî. Louvain (Dissertation) 1975
[nur in München, Fak. f. Gesch. und Kunstwiss. 1603/A 9a Hwa 016(n.v)]

Boncompagni, Baldassarre: Trattati d'aritmética I: Algoritmi de numero Indorum. Rom 1857

Boncompagni, Baldassarre: Trattati d'aritmética II: Ioannis Hispalensis *liber algorismi de practica arismetrice*. Rom 1857, 25-136

Busard, Hub Lambert Ludwig: Het rekenen met breuken in de middele euwen, in het bizonder bij Johannes de Lineriis. Brüssel 1968, 35 S. (Sonderdruck)

Busard, Hub Lambert Ludwig: Über eine Vorlage des Traktats Algorismus de minutiis von Johannes de Lineriis. Sudhoffs Archiv 82(1998) 74-91

Cantor, Moritz: Über einen Codex des Klosters Salem. Zeitschrift für Mathematik und Physik (Leipzig) 10(1865) 1-16
[zu Univ. Bibl. Heidelberg, Salem IX, 23]

Curtze, Maximilian: Über eine Algorismus-Schrift des 12. Jh. Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik (Leipzig) 8(1898) = Zeitschrift für Mathematik und Physik (Leipzig) 42(1898) Suppl. 1-27 [zu Clm 13021 Liber ysagogarum Alchorismi]

Curtze, Maximilian: Petri Philomeni de Dacia in Algorismum vulgarem Johannis de Sacrobosco commentarius cum Algorismo ipso. Kopenhagen 1897, 112 p.

Eneström, Gustaf: Der „Algorismus de integris“ des Meisters Gernardus. Bibliotheca Mathematica (Stockholm) ³13(1912/13) 289-332

Eneström, Gustaf: Der „Algorismus de minutiis“ des Meisters Gernardus. Bibliotheca Mathematica (Stockholm) ³14(1913/14) 99-149

Eneström, Gustaf: Das Bruchrechnen des Jordanus Nemorarius. Bibliotheca Mathematica (Stockholm) ³14(1913/14) 41-54

Folkerts, Menso; Kunitzsch, Paul: Die älteste lateinische Schrift über das indische Rechnen nach al-Hwârizmî. Bayerische Akademie der Wissenschaften, Philosophisch-historische Klasse, Abhandlungen, Heft 113, München 1997

Friedlein, Gottfried: Das Rechnen mit Kolumnen vor dem 10. Jh. [Kap. III]. Zeitschrift für Mathematik und Physik (Leipzig) 9(1864) 297-330

Friedlein, Gottfried: Die Entwicklung des Rechnens mit Kolumnen [Kap. IV]. Zeitschrift für Mathematik und Physik (Leipzig) 10(1865) 241-282

Friedlein, Gottfried: Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes vom 7. bis 13. Jh. Erlangen 1869 [= ND 1968]

Friedlein, Gottfried: Victorii calculus ex codice Vaticano editus. Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche (Rom) 4(1871) 443-463

Illmer, Detlef: Arithmetik in der gelehrten Arbeitsweise des frühen Mittelalters. In: Fenske, L., Rösener, W., Zotz, Th. (ed.): Institutionen, Kultur und Gesellschaft im Mittelalter. Sigmaringen: Thorbecke 1984, 35-58

Karpinski, Louis Charles: Two twelfth century algorisms. Isis (An international review devoted to the history of science and its cultural influences; Berkeley CA) 3(1920/21) 396-413 [From two mss. in the British Museum]

Nagl, Alfred: Über eine Algorismusschrift des 12. Jh. und über die Verbreitung der indisch-arabischen Rechenkunst und Zahlzeichen im christlichen Abendland. Zeitschrift für Mathematik und Physik, historisch-literarische Abteilung (Leipzig) 34(1889) 129-146, 161-170 [Cod. Vind. 275, nur eine Seite]

Pedersen, Fridericus Saaby: Petri Philomenae de Dacia et Petri de S. Audomaro opera quadrivialia (= Corpus Philosophorum Danicorum Medii Aevi, Pars 1, X:I). Kopenhagen 1983

Vogel, Kurt: Mohammed Ibn Musa Alchwarizmis Algorismus. Das früheste Lehrbuch zum Rechnen mit indischen Ziffern. Cambr.Un.Lib.Ms.Ii 6.5. Aalen: Otto Zeller 1963

Yeldham, Florence A.: The story of reckoning in the Middle Ages. London 1926