I. Quadrivium

II. Al-Khwarizmis Geometrie

1. Inhalt
2. Punkt, Linie, Figur, Winkel
3. Dreieck
4. Kreis, Kugel

III. Al-Zarqalis Trigonometrie

1. Europäischer Kontext
2. Sinus und Sinus versus
3. Tangens und Cotangens

Alfred Holl

# Das Quadrivium im Mittelalter

## Teil 2: Geometrie

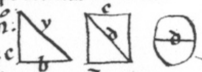
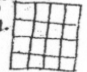
Die Regensburg-Prüfeninger Fassung
von al-Khwarizmis *Liber ysagogarum* und
von al-Zarqalis *Canones*

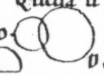
num pdiffras suas sintq; circuli uersus dextra-
du tarat pars siue ÷ siue 6 ÷ quanto plures
fuerint circuli tanto plus erit sic subtilis.
[illegible] Post hec extrahe radice nui una
cu circulis suis qs addidisti. Et q exierit
de nuo integro mediato serua sic [illegible] Si u
aliqd supfuerit pter cu ÷ n curas de eo
sic [illegible] scito te qd nus ille n hnt radice
Et si nich remanserit erit uera radix sine
fractione. Post hec nua adextris abinicio
diffra radicis medietate circulo÷ ÷ ac
cipe qd supfuit ÷ scribe cu seorsu ÷ minue
cu deloco suo h m [illegible] ÷ multiplica
qd manserit in 60 hoc modo [illegible] ÷
numera simile medietati circulo÷ quos ad
didisti sup num ÷ accipe supfluu ÷ scbes
cu subnuo integro ÷ minue cu de loco suo
sic [illegible] ÷ qd remanserit multiplicabis
cu in 60 ÷ nuabis medietate circulo÷ sic
[illegible] ÷ accipies supfluu ÷ scribes cu sub
nuo que scripsisti ÷ erit scda. ÷ si iteru
aliqd remanserit multiplicab cu prius [illegible]
÷ diuides ut prius ÷ scribes [illegible] integri
minuta scda [illegible] scdm circulos [illegible] qs possum
an num Integro÷ u ÷ minutiar radices
inuenire sunt. Si quide omia adinferiore
diffram deducenda sunt que deducta si
fuint scda habebt radice mta [illegible]
qua ista int se illa pducit q radices adsua
integra reducant ut possunt h adten de
radicib; Incip lib de musicis ac geom rolb;

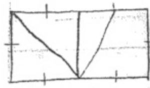
Integro÷ ac minutiaru habita noticia p
portionu ÷ pportionalitatu geometricaru
figuraru quib; astronomice disciplinę
inuentio ac inuentionis pbatio copat no
ticia indagari oportet De pportionibus

Omis itaq; nus adaliu compar uel erit in
multiplicantr e spes sunt dupl tripl qua
druplus sic infinitu. Multiplex u e qui
ctinet aliu plus qua semel h m [illegible] ÷ [illegible] uel
supparticularitate ut sesqltera sesqtertia

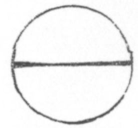
÷ deinceps. E aut supparticularis q relatus
ad aliu ctinet ipsu totu ÷ ei uel tcia uel
qrta sic [illegible] Uel supparciente ut supbi
partiens supbiquart sic ininfinitu. Suppar
tiens dr qui aliu tenet ÷ ei duas tcias
uel tres quartas ÷ sic infinitu ut hic [illegible]
÷ [illegible] Uel multiplicitate ÷ parte sic [illegible]
Uel multiplicitate ÷ partib; h m [illegible]

Punctu e qd parte caret. De Puncto.
Punctu e pncipiu linee. De linea.
Linea e longitudo sine latitudo. Linear
u gna sunt tria. Rectu circfrens ÷ flexuo
su. — O ∼ Rectaru u linearu
spes st 6 cater basis ypotenusa coraust
diagonal diametru h m.

Omis itaq; De Supficie ... cater si sup basim ducat sua totu trigo
nu sumit Cui medietas tgono attribuat
geometrica sagacitas impat h m. 
Et ome diametru psuu abitu
toti quarta sibi postulat De supficie.
Supficie u adei inuenienda soliditate
altitudine nece e multiplicare h m.

Figuraru aut queda extrectis lineis
tantu cstant ut trigonus De figuris
tetragonus pentagon ÷ sic de ceis h m.
Queda u excircufe
rentibus hoc pacto.  Queda ÷ ex
utrisq; sic De angulis.
In figuris st anguli quo÷ [illegible] st spes rectus
ut hic acutus aut ut iste hebes
u h modo. Medietas opposite linee
dati anguli utru rectus an hebes an acut
sit angulus apbat Si eni abangulo ad
mediu linee eque porrigr rectus erit si
infra acut si extra hebes ee n dubitat sic
Omniu angulo÷ aduab
rectis lineis cstituto÷ comune circufrentia
rect angls eque partit hoc modo.
Omis aut hebes ÷ acutus angulus adrecti
circufrentia pportionalis ostenditur.


Figuraru u trigon e qui
prima cui orthogonius.
origoni ampligoni hyso
pleurus hysocheles scalenon h m
Orthogonio÷ omniu recto duos acutos equa
pportione respondere sic Orogonio÷
duos inunu rectu angulu superare hoc m.
Omniu tgono÷ qscuq; duos an
gulos duob; rectis mui hre talit.
Trigono÷ omniu [illegible] angulos ? rectos anglos
cstituere oportet h m. De inueniente cateti
Orogonii tgoni catet basis ypotenusę
inse ducat ÷ de hypotenusa inse subthat
reliqui lat basis erit nus que inse ducat
÷ de ypotenusa inse minuat quatenus cateti
num supeminentis lat ostendat q inse cu
basi inse copulet e lat podisin et h m.
Cateus q De inuent cateti inysopleuro
ysopleuri sic queratr Dimidiu latus inse
de alto toto inse educt residui lat cateti
supta unitate ponit Queritr
Ysocheles u De inuentioe cateti Inysochele
dimidiu basis inse de alto latere inse di
minuit remantis lat catetu dabit.
Scaleni quoq; De inuent cateti Inscaleno
catet sic inuenit Minor ypotenusa ÷ basis
inse sigillati ducit aggregent erq suma
maior inse minuit relig dimidiu pbasim
diuidit q quotiens ibi repit totiens unitate
pcisura minor habere pbatur hoc m.
Trigono÷ De comuni pport tgono÷ uni ypote
sub eade cstituto÷ ypotenusa emunis p nusq
portio h m. Omis circuli st equales
quo÷ diametra st eqlia h m.
Omis recte linee acentro adcircufrentia st
equales st. Omis linee equalit acentr
distare pbant scdm pportionales pendicu
lares abipso centro hac roe
Ome diametru t ducti cu septime partis
adiectioe ambitu fere ctinat uel ? o ducti
÷ 7 diuisu ÷ exiso omis orbita sublata

??teu pene pdiametro ponit uel 7 ducta ÷ ??
diuisa. Latus aut decime multiplosis ambit
inse ei diametru ueri indicat. Adspica u
qntitate inuenienda diametru ei cubicet
oportet ipsaq; cubicatione ii ducas ÷ ei ? i
globositate spere demonstrat. Incip lib quart
Hec hactenus de de temporib; ÷ motibus
arithmeticis musicis ac geometricis roib;
introducendis dixisse sufficiat. Hic aut de
temporib; siquide ÷ eo÷ noticia motus er
rantiu cognoscunt. Et pmo quide de anno÷
amundi pncipio ÷ a xpi annos inuentione
tractem. Adcomunem itaq; tminu cunctar
gentiu dieru scl anni a xpi suma diffra in
dd ÷ [illegible] annis reducant. Qd ut facillime
fiat ad anno÷ suma p [illegible] primo ducta
quaternarius diuisor occurrit Constat qppe
solaris anni tot dieru qrtis. Quib; ÷ dieb;
9 ÷ dies de diffra copulent. Et inpfecti
anni a xpi dies mensiu usq; inpsente die
eisde denuo cgregent. Hec aut dier suma
p [illegible] multiplicanda e ÷ p [illegible] ad annos
inueniendos diuidenda. Tot naq; lunaris
annus continet tresimas. Residui denoratio
p [illegible] diuisi mensib; e partienda unicuiq;
scl ? 9 dies ÷ 1 ? horas ÷ 1 ? pmta diei lune
hora. 6 calculationis dante pncipiu. Quo÷
pncipiu e a pliri consimili septembri.
Hec e De inuent anno÷ arabu ÷ hebraicos
aut regula inuentiois anno÷ arabu ÷ he
braicos. Est quide primo notandu hebreos
dies in ??? o mta diuidere ÷ mse in ? 9
dies ÷ 1 ? horas ac 7 [illegible] mta partiri hac quoq;
ratione annu et [illegible] dieb; ÷ minutis cstare 9 9 1 6
anno÷ pfecto÷ suma p 19 diuidat cueniat.
Cui diuisis denoratio quotiens unitate huit
totiens 1 ? 2 menses pdicte sume tbuant
oportet. Nam denoratio pseptenariu mul
tiplicanda e unde e ÷ ad annos cstituendos
1 ? diuidenda. Cuq; inses in restituit cu
residuis aprima diuide sic ? coplentur.



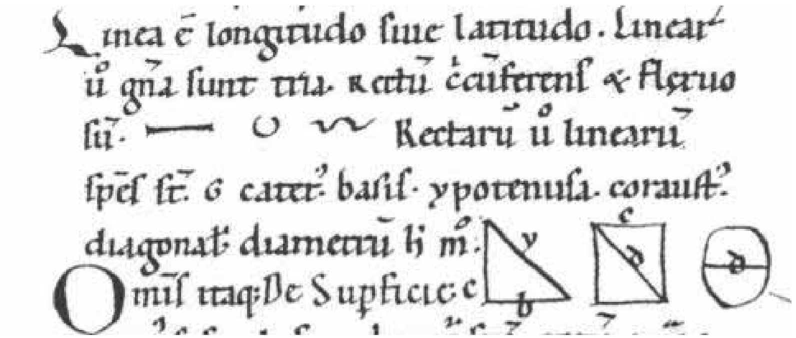
# II.1 Inhalt

| | |
|---|---|
| Proportionen | Arithmetica / Musica speculativa |
| Punkt | |
| Linie | gerade, kreisförmig, krumm |
| Fläche | Dreieck, Rechteck; Grundlinie · Höhe |
| Figuren | geradlinig, kreisförmig, beiderlei begrenzt |
| Winkel | recht, spitz, stumpf |
| Dreiecksformen | rechtwinklig, spitzwinkling, stumpfwinklig, gleichseitig, gleichschenklig, beliebig |
| Winkelverhältnisse im Dreieck | Winkelsumme 180° |
| Rechtwinkliges Dreieck | Satz von Pythagoras |
| Gleichseitiges Dreieck | Höhe |
| Gleichschenkliges Dreieck | Höhe |
| Beliebiges Dreieck | Höhe |
| Vierstreckensatz | |
| Kreis | Eigenschaften, Umfang |
| Kugel | Volumen |

# 2. Punkt, Linie, Figur

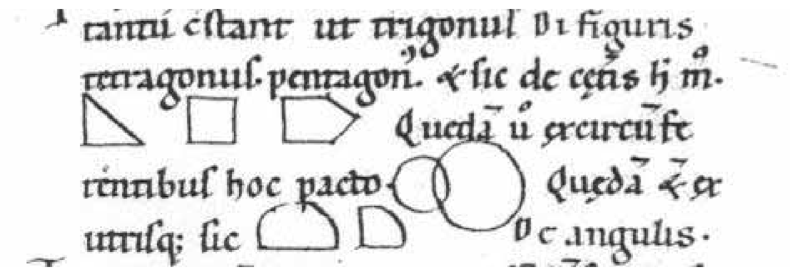
Punkt — keine Teile, Beginn einer Linie

Linie — gerade, kreisförmig, krumm
Dreieck: Basis, Kathete (Höhe!), Hypotenuse
Rechteckseite (*coraustus*?), Diagonale, Durchmesser



Linea ē longitudo sine latitudo. Linear-
ū quā sunt tria. Rectū circūferens & flexuo
sū. Rectarū ū linearū
spēs sūt 6 cathet' basis. ypotenusa. coraust'.
diagonal' diametrū h' m.
Omis itaq; De Supficie

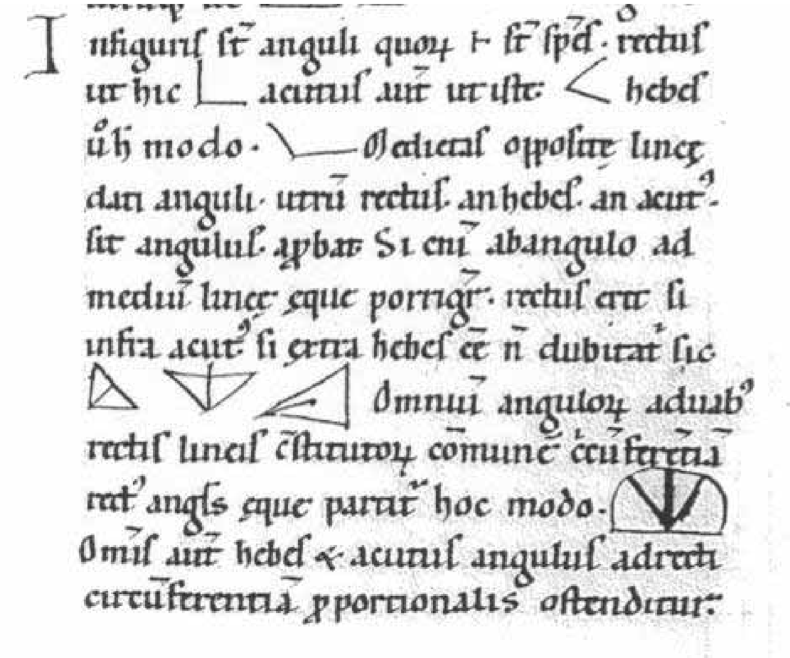
Figur — geradlinig begrenzt: Dreieck, Viereck, Fünfeck etc.
kreisförmig begrenzt: Kreis
gerade und kreisförmig: Kreissektor



tantū cōstant ut trigonus Di figuris
tetragonus. pentagon. & sic de cēis h' m.
Quedā ū circūcūste
rentibus hoc pacto Quedā & ex
utrisq; sic De angulis.

## 2. Winkel

recht, spitz, stumpf



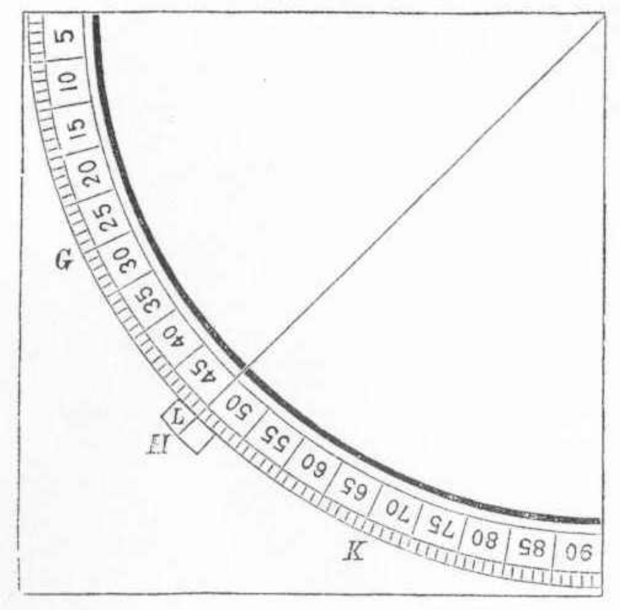
Schenkellänge normieren
Rechten Winkel zeichnen
Verbindungslinie der Endpunkte der Schenkel
Winkelhalbierende bestimmen
Länge bis zur Verbindungslinie bestimmen

beliebiger Winkel:
Winkelhalbierende trifft Verbindungslinie: > 90°
Winkelhalb. trifft Verbindungslinie nicht: < 90°

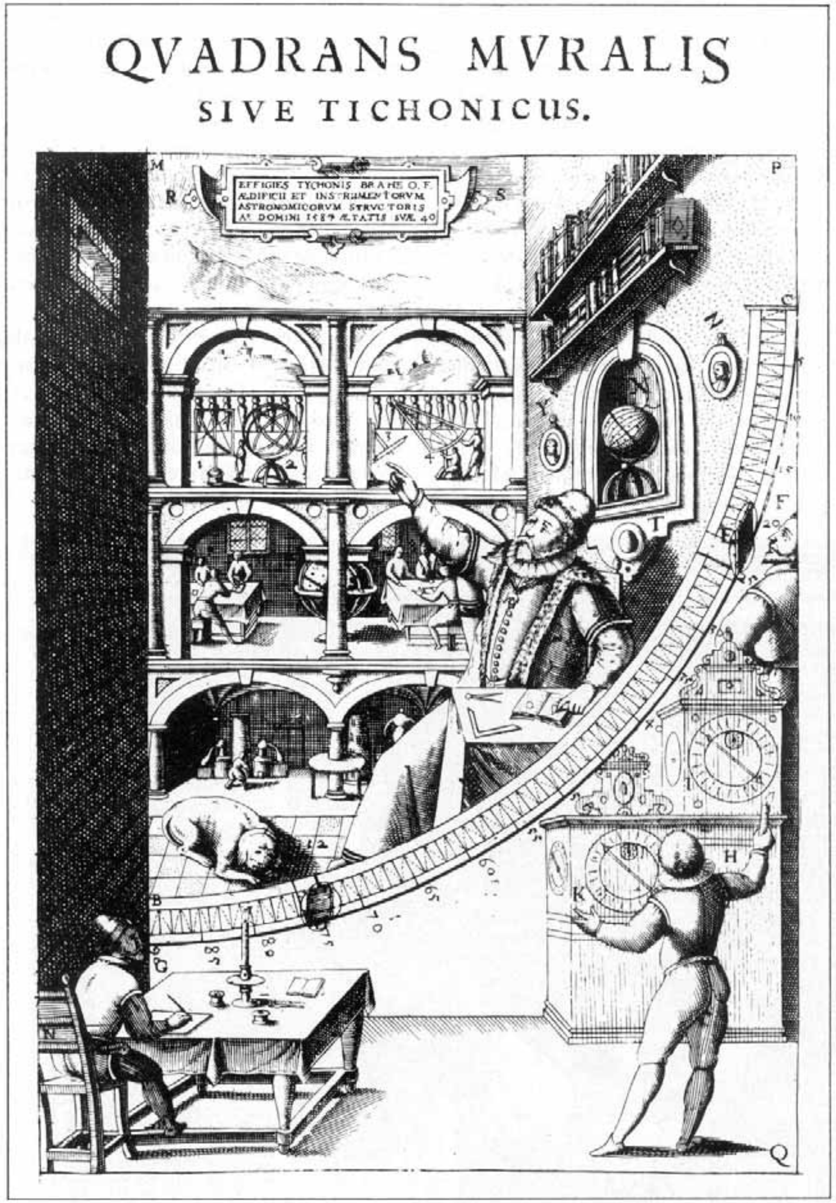
Proportionalität von Winkelgröße und Bogenlänge

# 2. Winkel

Al-Battani (~858 - 929)
*Kitab al-Zidsch / Opus astron.*
*Quadrans murale*: N-S-orientiert
Messung Sonnenhöchststand
(G Wintersolstitien,
K Sommersolstitien)



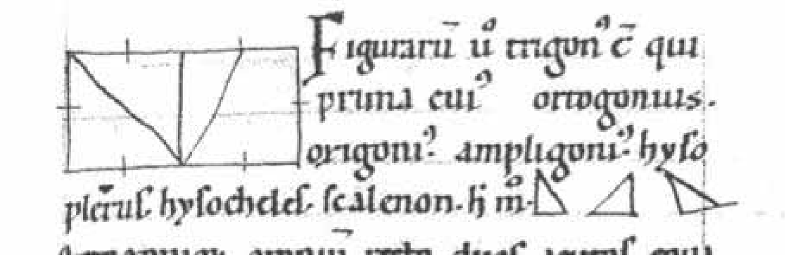

(ed. Nallino, Carlo Alfonso,
1899-1903, I 142, III 214)




Tycho Brahes Renaissanceschloss Uranienborg
auf der Insel Ven im Öresund

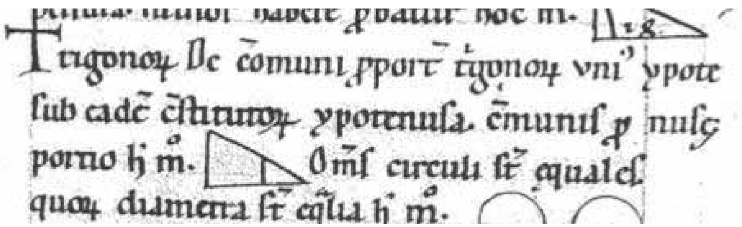
## 3. Dreiecksfläche
## Dreiecksformen
## Winkelsummen
## Vierstreckensatz

Rechtecksfläche = Basis · Höhe
Dreiecksfläche = ½ · Basis · Höhe



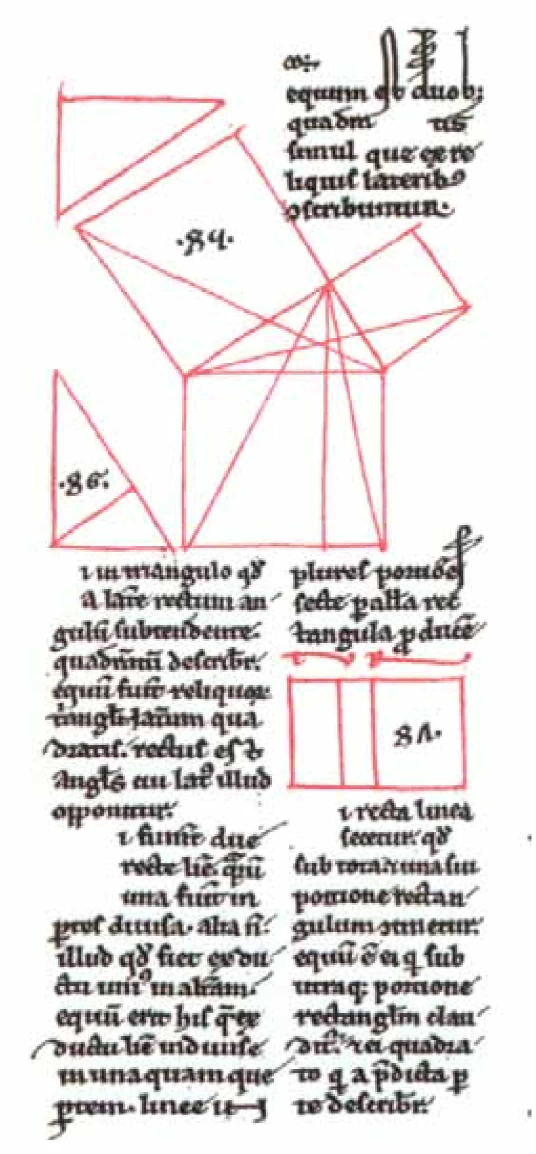
**Formen**:
rechtwinklig, spitzwinkling, stumpfwinklig,
gleichseitig, gleichschenklig, beliebig

**Winkelsummen**:
rechtwinklig: zwei spitze Winkel = 90°
spitzwinklig: zwei spitze Winkel > 90°
beliebig: drei Winkel = 2 rechte = 2 · 90° = 180°



**Vierstreckensatz**:
feste Hypotenusenrichtung (*sub eadem hypotenusa*)

# 3. Rechtwinkliges Dreieck
## Satz von Pythagoras

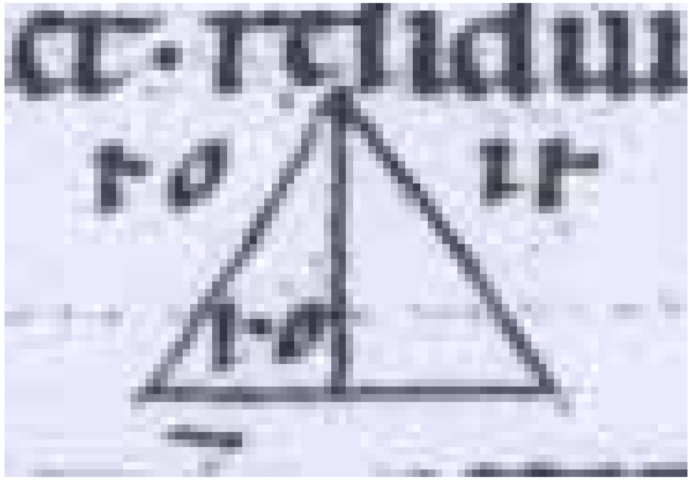


Basis² + Kathete² = Hypotenuse²

heute:
1. Kathete² + 2. Kathete² = Hypotenuse²

Pythagoreische Tripel lösen Gleichung ganzzahlig,
z. B. $3^2 + 4^2 = 5^2$

# 3. Gleichseitiges Dreieck: Höhe



Zahlenwerte?

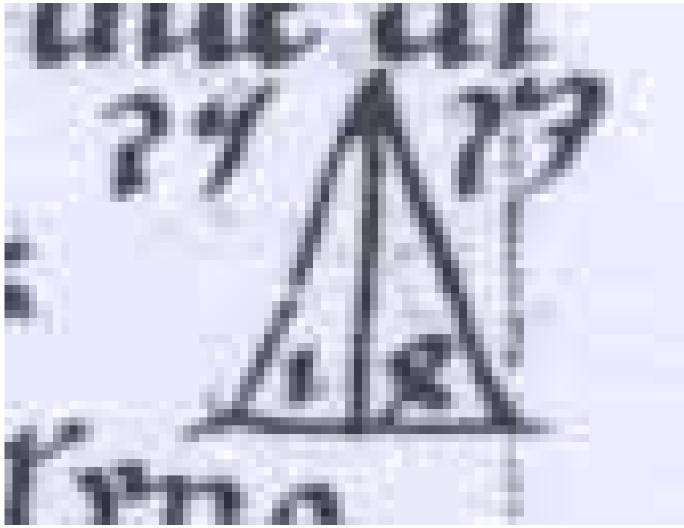
Satz von Pythagoras im halben Dreieck:
Höhe² = Seite² - (Seite/2)² = ¾ · Seite²

$h^2 = a^2 - (a/2)^2 = \frac{3}{4} a^2$
$h \approx 0{,}866\ a$

$4h^2 = 3a^2$ geht nicht ganzzahlig (nur trivial)
wegen $2 \cdot h = \sqrt{3} \cdot a$

Zahlen in der Zeichnung unverständlich, vielleicht
$26^2 \approx 30^2 - 15^2$

## 3. Gleichschenkliges Dreieck: Höhe



$a = 14$
$b = 25$
$h = 24$ (verschrieben)

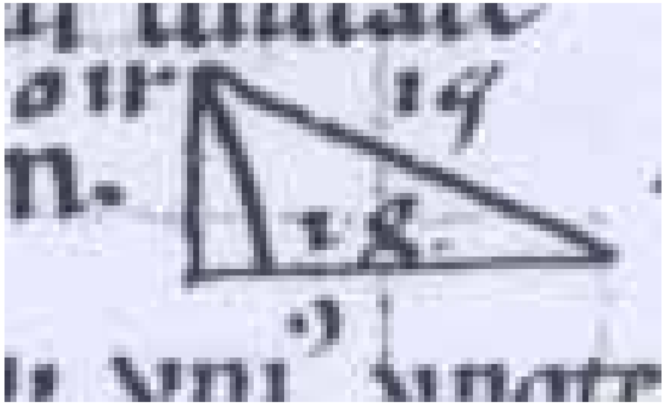
Satz von Pythagoras im halben Dreieck:
Höhe² = Schenkel² - (Grundlinie/2)²

$h^2 = b^2 - (a/2)^2$

Es gibt ganzzahlige Lösungen,
in der Zeichnung

$24^2 = 25^2 - (14/2)^2$

# 3. Beliebiges Dreieck: Höhe Allgemeiner Satz von Pythagoras




$a = 14$
$b = 15$
$c = 13$

senkrechte Projektion von b auf die Basis a:
$p = (a^2 + b^2 - c^2) / 2a$

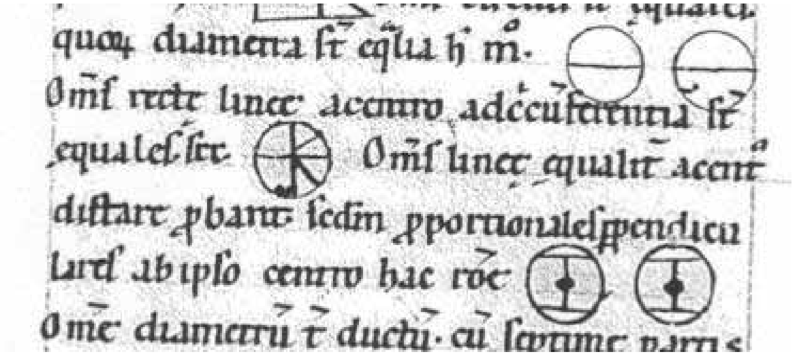
senkrechte Projektion von c auf die Basis a:
$q = (a^2 + c^2 - b^2) / 2a$

$p = (14^2 + 15^2 - 13^2) / (2 \cdot 14) =$
$p = (196 + 225 - 169) / 28 = 9$

$q = (14^2 + 13^2 - 15^2) / (2 \cdot 14) =$
$q = (196 + 169 - 225) / 28 = 5$

Höhe:
$h^2 = b^2 - p^2 = 15^2 - 9^2 = 144$
$h^2 = c^2 - q^2 = 13^2 - 5^2 = 144$
$h = 12$

# 4. Kreiseigenschaften, -umfang Kugelvolumen



Kreise gleich, wenn Durchmesser gleich.
In einem Kreis: Alle Radien gleich lang.
Auf einem Durchmesser senkrechte Sehnen gleicher Länge
sind gleich weit vom Mittelpunkt entfernt.

Kreisumfang (ungefähr):

$u = d \cdot \text{const}$

$\text{const} = 22/7 \approx 3{,}142857$ oder

$\text{const} = \sqrt{10} \approx 3{,}16227766$

heute: $\pi = 3{,}14159\ldots$

Kugelvolumen (ungefähr):

$V = (11/21)\, d^3 = 1/6 \cdot 22/7\, d^3$

heute: $V = 4/3\, r^3 \pi = 4/3\, d^3/8\, \pi = 1/6\, d^3 \pi$

## III. Trigonometrie – Winkelfunktionen

### 1. Europäischer Kontext

12./13. Jh. Verbreitung durch lat. Übersetzungen arab. astronomischer Texte

~1231 Wilhelmus Anglicus / Marsiliensis
übersetzt, bearbeitet al-Zarqali, macht die *Tabulae Toletanae* besser bekannt

14. Jh. Erste eigenständige europäische Werke

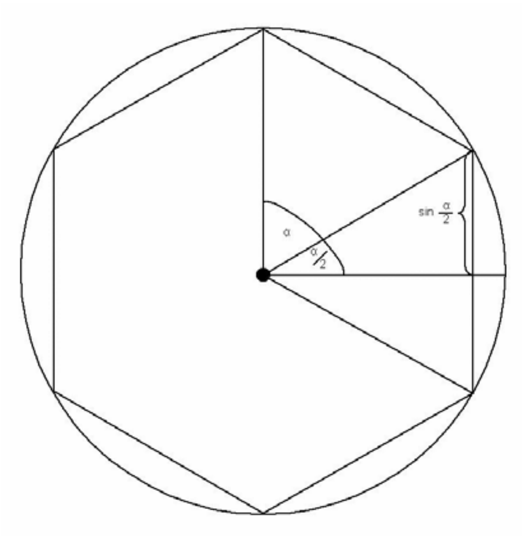
~1310 John Mauduith, Oxford
*Parvus tractatus*

1292-1335 Richard Wallingford, Oxford
*Quadripartitum de sinibus demonstratis*

1288-1344 Levi ben Gerson, Orange und Avignon
1343 *De sinibus, chordis et arcubus*

~1300-~1350 Jean de Meurs, Paris
„Figura inveniendi sinus kardagarum“

## 2. Sinus und Sinus versus

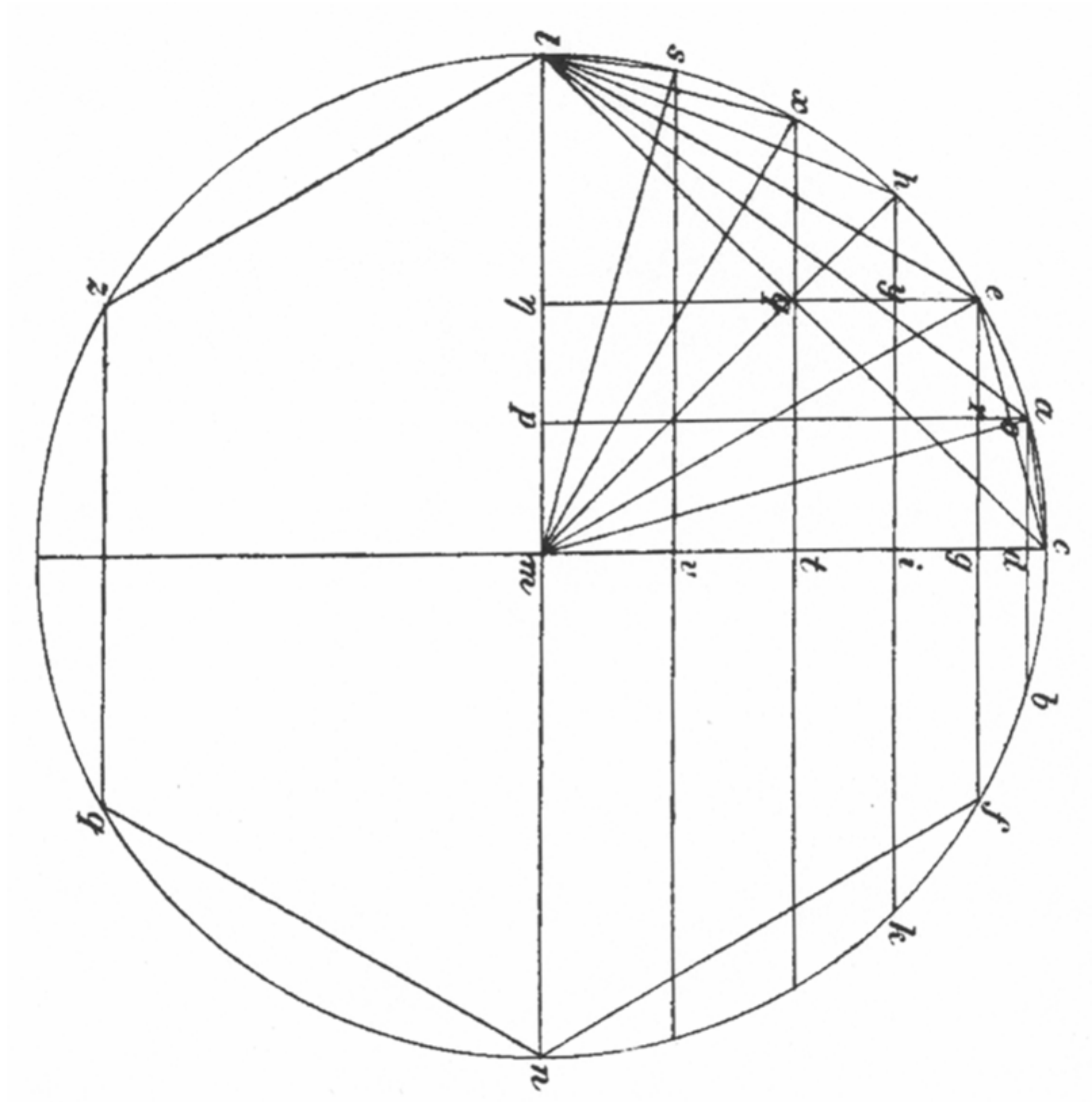


Sinus (rectus):
halbe Vielecksseite (corda)

z.B.: sin 30°
halbe 6-Eck-Seite
360° : 6 = 60°

kardaga: 15°

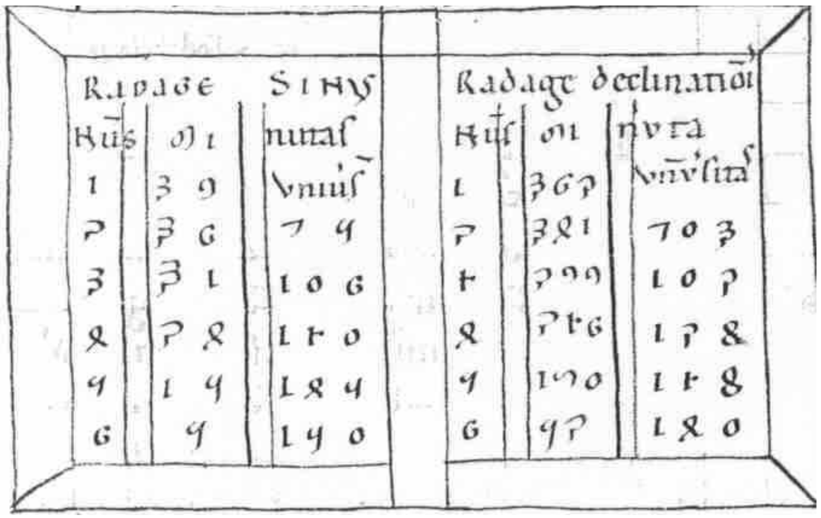
Sinus versus = 1-cos



Johannes de Muris (~1300-~1350), Fig. inveniendi sinus kardagarum,
Cod. Basileensis F.II.7, 83v (Curtze, 1900, 414; cf. Clm 13021, 33r)

# 2. Sinus und Sinus versus

## Sinustabellen



(Clm 13021, 33v)

| Tabula kardagarum sinus | | | | Tabula kardagarum declinationis | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Numerus kardagarum | Minuta universitatis | Minuta sinus | Minuta universitatis — Sinus rectus | Numerus kardagarum | Minuta universitatis | Minuta declinationis | Minuta universitatis — Declin. recta |
| 1 | 150 | 39 | 0 | 1 | 1440 | 362 | 0 |
| 2 | 111 | 36 | 75 | 2 | 1074 | 341 | 703 |
| 3 | 75 | 31 | 106 | 3 | 737 | 299 | 1002 |
| 4 | 44 | 24 | 130 | 4 | 438 | 236 | 1238 |
| 5 | 20 | 15 | 145 | 5 | 202 | 150 | 1388 |
| 6 | sinus versus | 5 | 150 | 6 | Declinationis verse | 52 | 1440 [61r] |

Vergleichbare Sinustabellen in:

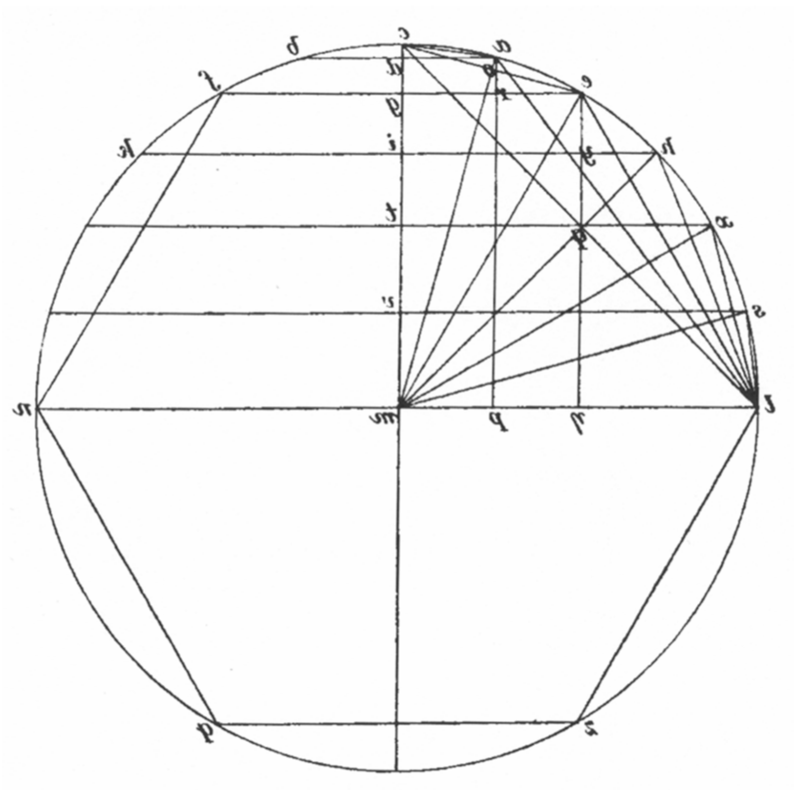
Canones Arzachelis, Erfurt, Cod. Ampl., fol.394, 11

= Johannes de Lineriis (-1355), *Canones Tabularum primi mobilis*

Cod. Basileensis F.II.7, 60v (Curtze, 1900, 339 und 411)

# 2. Sinus und Sinus versus

## modernisierte Tabelle



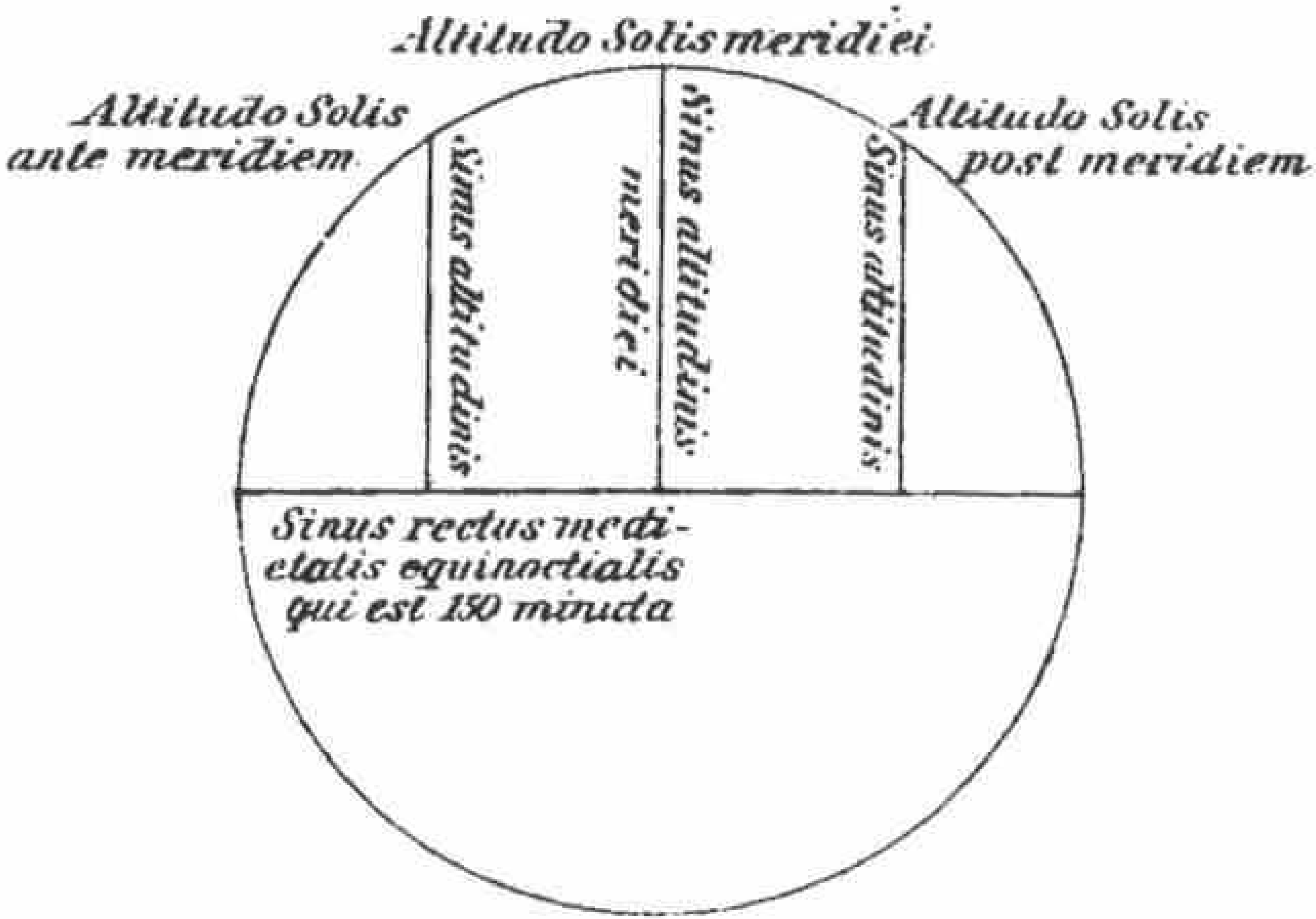
| Winkel (heute) | Sinus (heute) | numerus kardagae | num. kard. (oberer Rand) | sinus rectus alicuius arcus partialis | sinus rectus (kumuliert) | sinus versus alicuius arcus partialis | sinus versus = 1-cosα (kumul.) (ergänzt) | sinvers (90°-α) = 1-sinα (ergänzt) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | 150 |
| | | 1 | | 39 | | 5 | | |
| 15° | | | 1 | | 39 | | 5 | 111 |
| | | 2 | | 36 | | 15 | | |
| 30° | ½ | | 2 | | 75 | | 20 | 75 |
| | | 3 | | 31 | | 24 | | |
| 45° | ½√2 | | 3 | | 106 | | 44 | 44 |
| | | 4 | | 24 | | 31 | | |
| 60° | ½√3 | | 4 | | 130 | | 75 | 20 |
| | | 5 | | 15 | | 36 | | |
| 75° | | | 5 | | 145 | | 111 | 5 |
| | | 6 | | 5 | | 39 | | |
| 90° | 1 | | 6 | | 150 | | 150 | 0 |

## 2. Sinus und Sinus versus

Astronomischer Zweck

Beispiel:
Aktuelle Uhrzeit aus Mittagshöhe der Sonne und aktueller Höhe der Sonne bestimmen.

Zusätzlich braucht man die aktuelle Tageslänge (vs. Nacht) oder die Polhöhe = geographische Breite



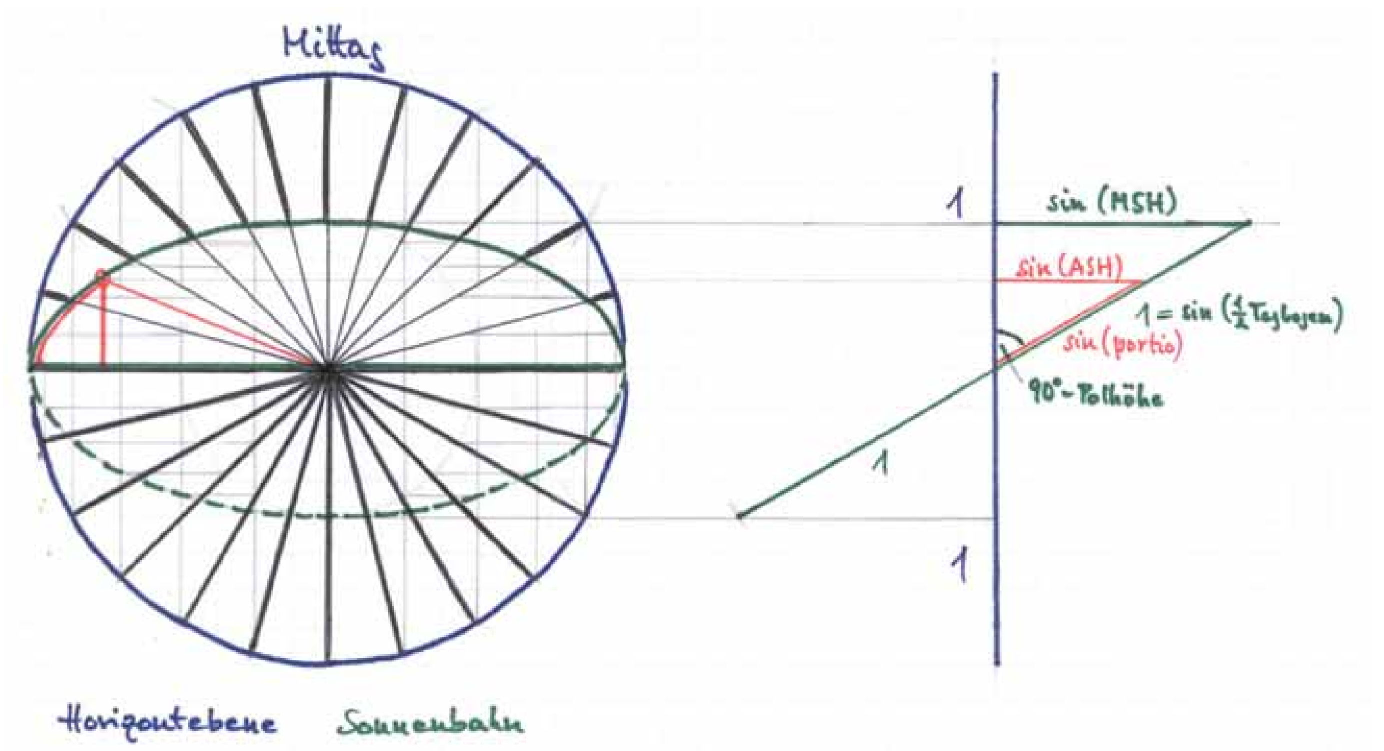

Anonymus, Clm 234, 93r (Ende 13. Jh.)
(Curtze, 1900, 367)

## 2. Sinus und Sinus versus

Astronomischer Zweck

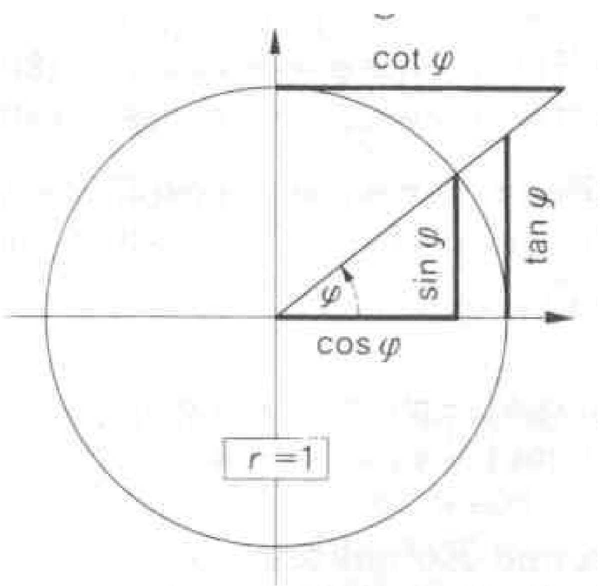
sin (altitudo mediae diei) :
sin (medietas aequinoctialis)
=
sin (altitudo praesens) :
sin (portio aequinoctialis)

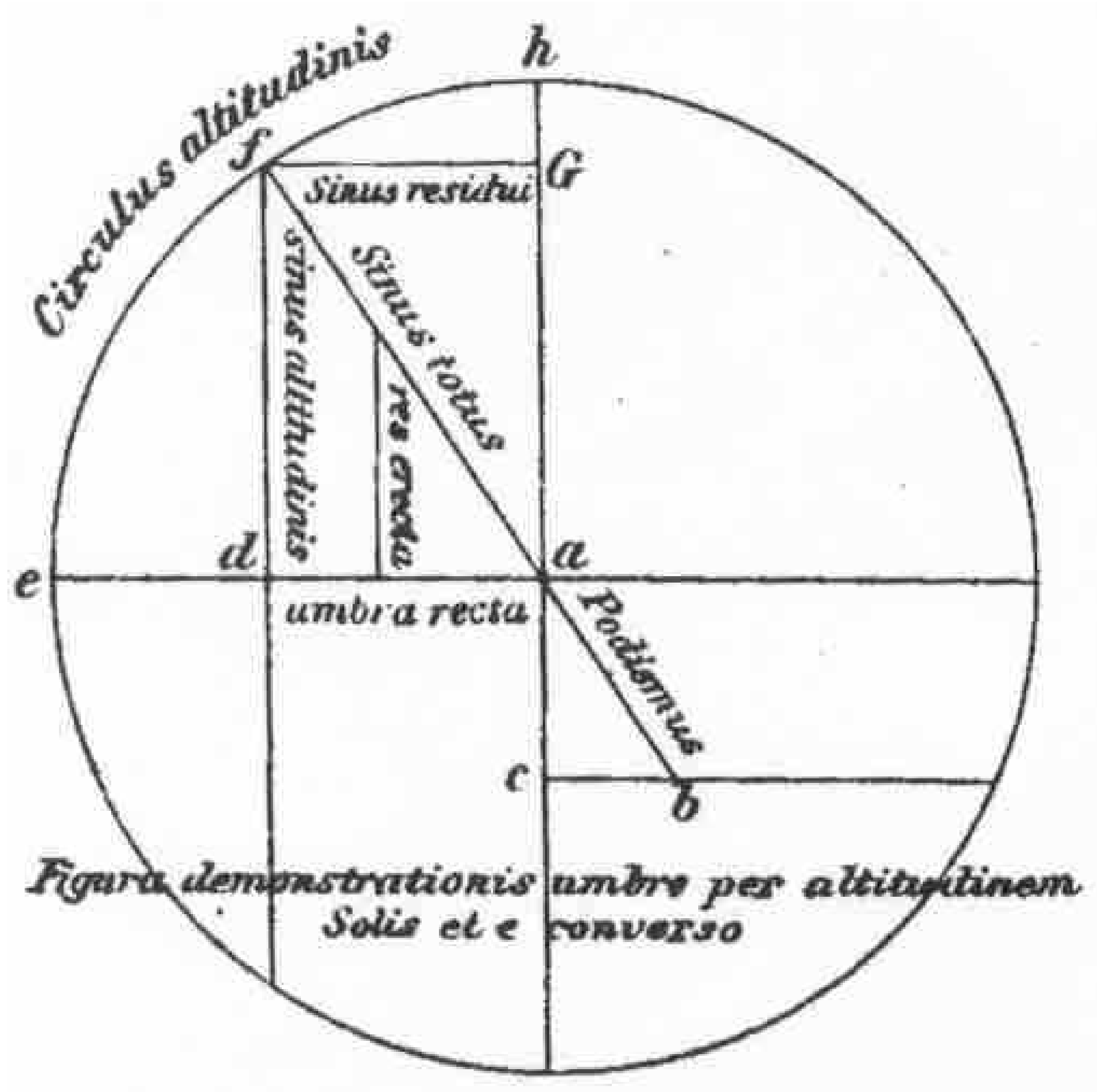
wobei
sin (medietas aequinoctialis)
= 150 minuta ≡ 1 = r
und
1h ≡ 15°




(in der Skizze äquinoktiale MSH und ASH)
Substitution der aktuellen Höhen durch
die Höhen an den Äquinoktien, dann Berechnung,
dann Rücksubstitution
Mittagssonnenhöhe → 90° - Polhöhe
Aktuelle Sonnenhöhe →
ASH - (MSH - (90° - Polhöhe))

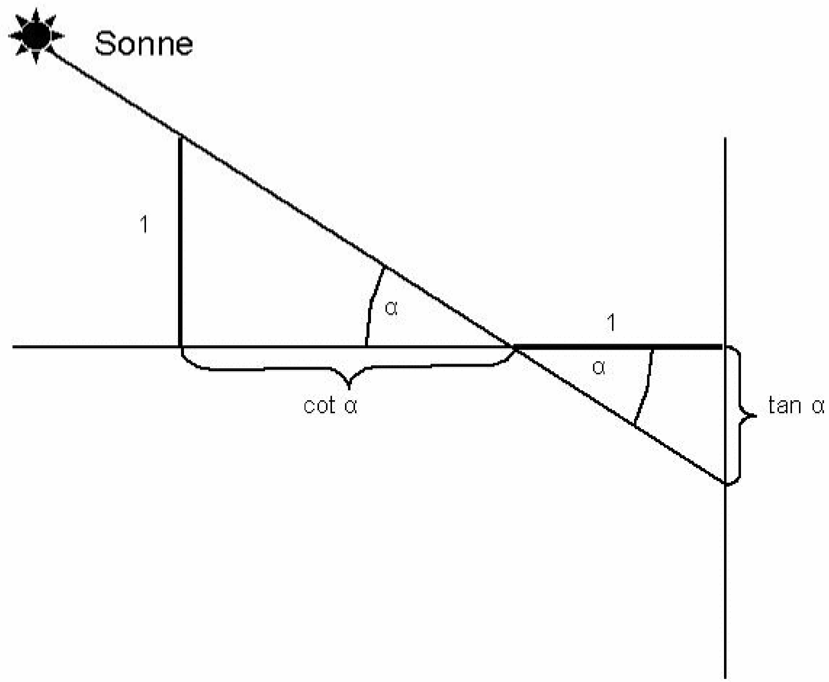
# 3. Tangens und Cotangens




Canones Arzachelis, Erfurt, Cod. Ampl., fol. 394, 11
(Curtze, 1900, 342)

# 3. Tangens und Cotangens




(nach Gericke 1993, 2, 96-97)

Astronomischer Zweck:
zur Beobachtung von
Himmelskörpern

Blick in die Sonne
nicht ratsam

Heute:
Die Länge des Stabes ist
der Kreisradius,
die Stabspitze ist
der Kreismittelpunkt.

Bei al-Zarqali:
Cotangens: *umbra recta*
(vertikaler Stab, horizontale Fläche)
Tangens: *umbra versa*
(horizontaler Stab, vertikale Fläche)