Alfred Holl

Summenformeln
für endliche arithmetische und geometrische Reihen
in Handschriften
und frühneuzeitlichen Rechenbüchern
im Regensburger Raum

1.1 Endl. arithm. Reihen bei „Alkuin“, *Propositiones ad acuendos iuvenes*

~800

‚100 Stufen’

Lösung:
Bildung von Zahlenpaaren mit der Summe 100

(42) PROPOSITIO DE SCALA HABENTE GRADUS CENTUM.

Est scala una habens gradus C. In primo gradu sedebat columba una, in secundo duae, in tertio tres, in quarto IIII, in quinto V. Sic in omni gradu usque ad centesimum. Dicat, qui potest, quot columbae in totum fuerunt.

SOLUTIO.

Numerabis autem sic: A primo gradu, in quo una sedet, tolle illam, et iunge ad illas XCVIIII, quae in nonagesimo nono gradu consistunt, et erunt C. Sic secundum ad nonagesimum octavum, et invenies similiter C. Sic per singulos gradus unum de superioribus gradibus et alium de inferioribus hoc ordine coniunge, et reperies semper in binis gradibus C. Quinquagesimus autem gradus solus et absolutus est non habens parem. Similiter et centesimus solus remanebit. Iunge ergo omnes simul, et invenies columbas $\overline{\text{V}}$ L.

Propositiones ad acuendos iuvenes, Nr. 42
(Edition Folkerts 1978, S. 70 und 37f.)

1.1 Endl. arithm. Reihen bei Fridericus Amann

~1405-1465

Algorismus Ratisbonensis

~1450

(Edition Vogel 1954)

Bewegungsaufgaben:

progressive vs. *aequaliter vadere*

Nr. 53, 55 mit Zahlenwerten

Nr. 54 ohne Zahlenwerte

Zwei Wanderer sollen an einem Tag n zusammentreffen;

der eine geht *progressive* (beginnend mit 1),

der andere geht *aequaliter*.

Wieviele Meilen geht der andere täglich?

$$(1 + n)n/2 = xn$$

$$x = (1 + n)/2$$

Letzteres als Lösungsweg angegeben

dazu Nr. 99 mit Zahlenwerten

Lösungsberechnungen ohne Begründung

keine explizite Formel, nur Schrittweite 1

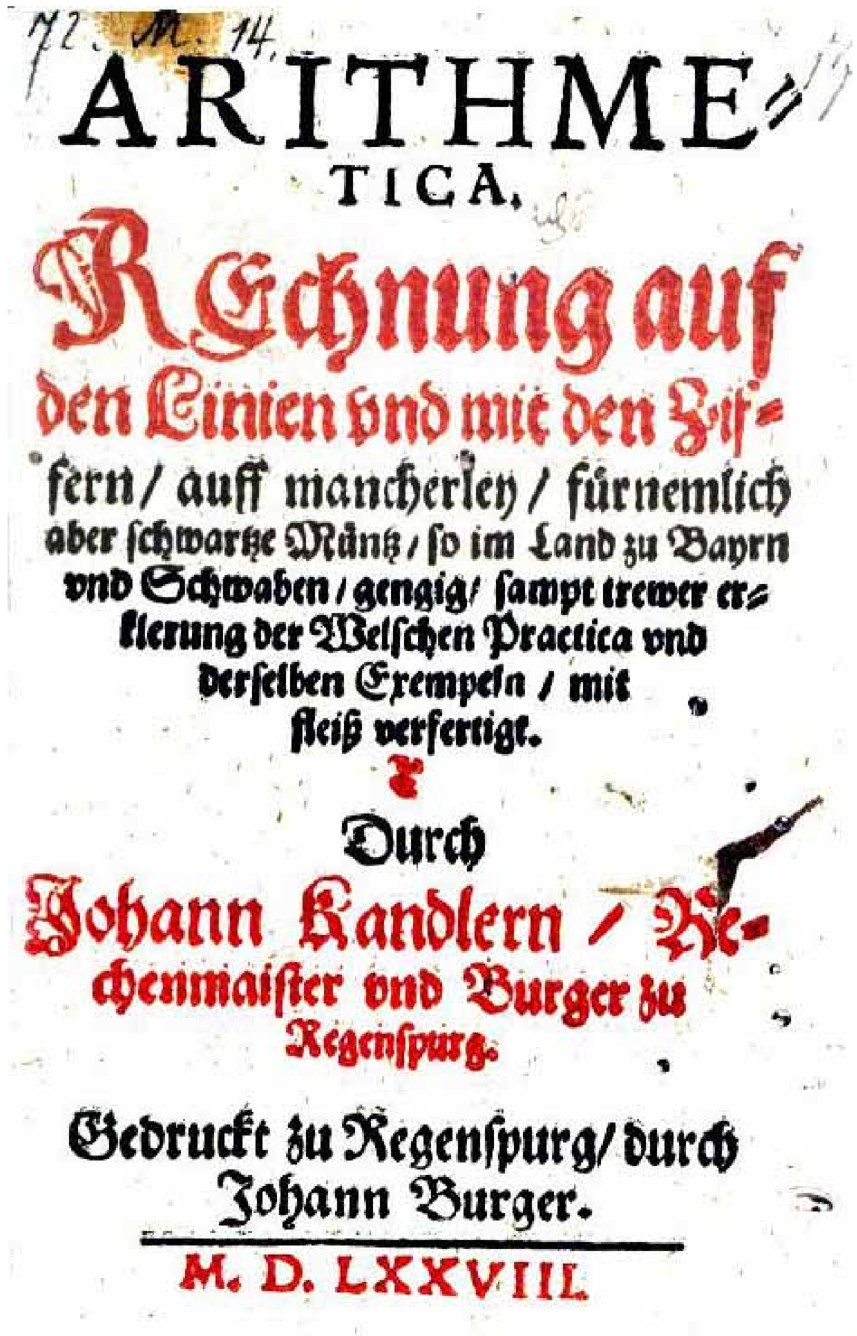
1.2 Endl. arithm. Reihen
bei Johann Kandler

~1530-1600

ältestes gedrucktes
Regensburger Rechenbuch

Arithmetica 1. Auflage
Regensburg: Joh. Burger 1578
(UB München; ÖNB)

Arithmetica 3. Auflage
Lauingen: Jacob Winter 1605
Hrsg. Alexius Bruckmüller,
Buchfürer zu Regensburg
(SB Regensburg)


72. M. 14.

ARITHME-
TICA.

Rechnung auf
den Linien vnd mit den Zif-
fern/ auff mancherley/ fürnemlich
aber schwartze Müntz/ so im Land zu Bayrn
vnd Schwaben/ gengig/ sampt trewer er-
klerung der Welschen Practica vnd
derselben Exempeln/ mit
fleiß verfertigt.

Durch
Johann Kandlern/ Re-
chenmaister vnd Burger zu
Regenspurg.

Gedruckt zu Regenspurg/ durch
Johann Burger.
M. D. LXXVIII.

1.2 Endl. arithm. Reihen bei Johann Kandler

Arithmetica 1578, Ci-i’

PRogressio ist eine auffsteigung vnnd fortgehung in zalen nach gleicher vbertrettung.

In der Arithmetischen Progression / vbertrit eine zal die ander / nach einer oder etlichen bestimbten zalen/ Als 1. 2. 3. 4. 5. 6. vbertrit je eine die ander vmb 1. Oder 1. 3. 5. 7. 9. vbertrit eine die ander vmb 2. oder 3.6.9.12. vbertrit eine die ander vmb 3. also on ende.

Solche vnnd dergleichen Arithmetische Progressiones kurtz in ein summa zubringen/ addir die erst zal zur letzten/ was kombt/ multiplicir mit dem halben theil der stett / erzeigt sich die summa/ Als.

addir die erst zal zur letzten/
was kombt/ mul=
tiplicir mit dem halben theil
der stett/ erzeigt
sich die summa

1.2 Johann Kandler: Prüfeninger Eierwette

Arithmetica 1578, Xiii’-iv’

37 Gänge
1. Gang 24 Schuh
37. Gang 37·24 = 888 Schuh

(24+888) · 37/2 = 16872 Schuh
= 3374 Passus 2 Schuh
= 26 Stadien 124 Passus 2 Sch
= ¾ Meile 2 St 124 P 2 Sch

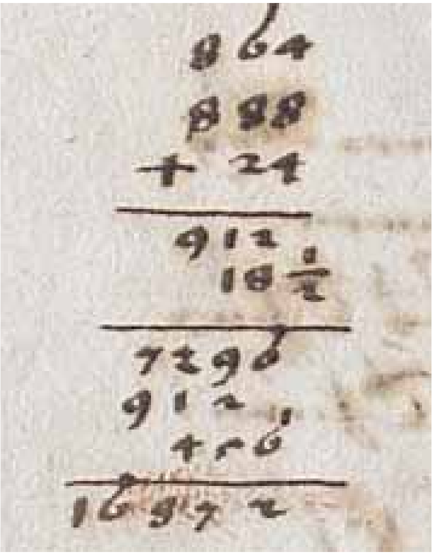
Parallelen in Georg Wendlers Bearbeitung von Anton Neudörffers *Grosser Arithmetic*

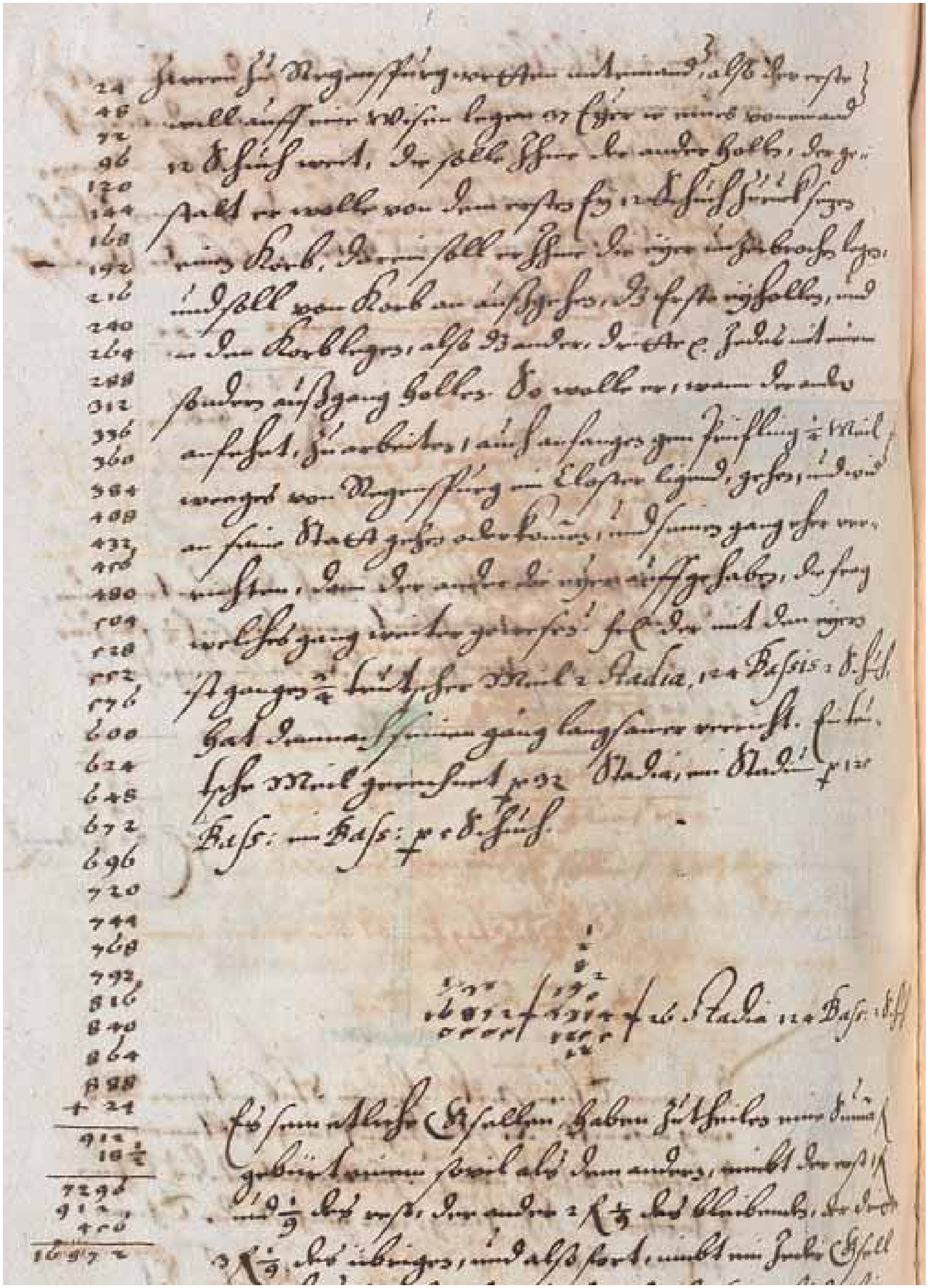
17 Item zwen zu Regenſpurg/ wetten mit einander / alſo /der erſt will auff eine wiſen legen 37 Ayr/ je eins vom andn 12 ſchuch weit/ die ſoll jme der ander holen/ der geſtalt/ er wölle von dem erſten Ay 12 ſchuch zuruck ſetzen einen Korb/ darein ſoll er jhme die Ayer unzerbrochen legen/ vñ ſoll vom korb an außgehen/ das erſte Ay holen vnd in den korb legen / Alſo das ander/ dritt/ viert/ ꝛc. jedes mit einem ſondern außgang holen. So wölle er (wann der ander anfecht zuarbeiten) auch anfahen gen Prieuening zugehen/ (iſt ein Kloſter bey Regenſpurg $\frac{3}{4}$ Meil dauon ligend) vnd wider an dieſelbe ſtat kom̃en/ vnnd ſeinen gang ehe verrichten/ dañ der ander die Ayer auffgehoben/ die frag welches gang weiter geweſen? Facit der mit den Ayrn iſt gangen $\frac{3}{4}$ teutſcher meil 2 ſtadia/ 124 Paſſus/ 2 ſchuch/ hat deñoch ſeinē gang lengſamer verrichtt/ ein teutſche meil gerechnet p 32 ſtadia/ ein ſtadium per 125 paſſus ein paſſus per 5 ſchuch oder ein teutſche meil p 4000 paſſus / ein paſſus p 5 ſchuch.

1.2 Johann Kandler: Prüfeninger Eierwette

Bearbeitung von
Georg Wendler (1619-1688)
Hs. *Analysis vel resolutio*
Cgm 3789, 374v (~1650)

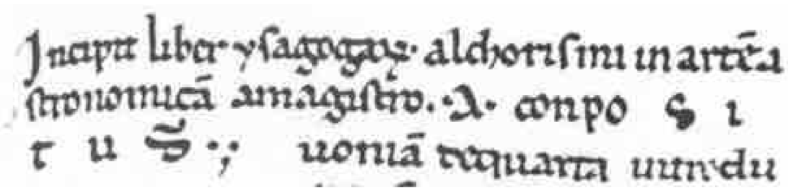
Erst explizite Auflistung,
dann Berechnung mit Formel





2.1 „Exponentenaddition“ bei der Multiplikation von Sexagesimalbrüchen bei al-Khwarizmi / Adelhard *Liber ysagogarum Algorismi*

Clm 13021
Kloster Prüfening, ~1165



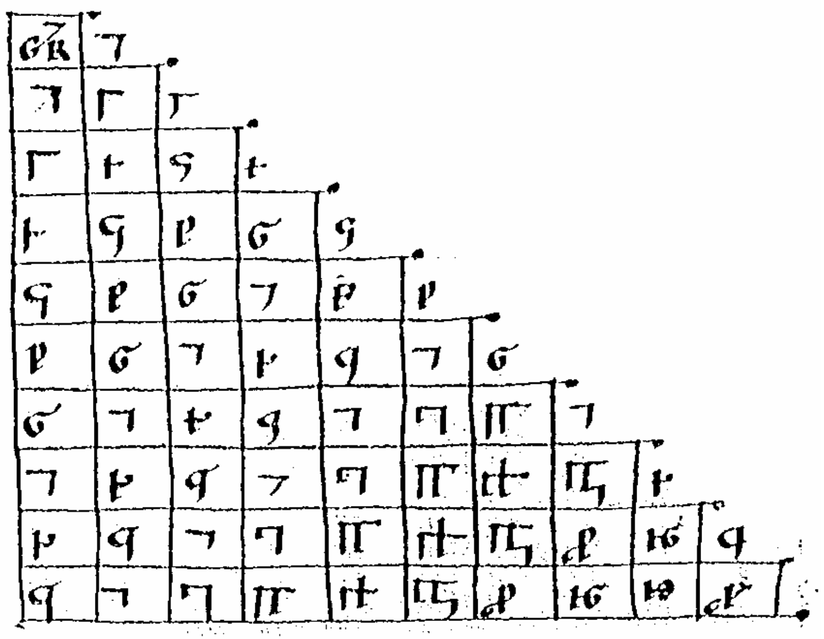
(Bibl. Nat. Paris, Lat. 16208, 67r)

Mohammed ben Mūsā al-Khwarizmi (~780-~850)
Perser aus Khwârazm / Khorasmia
am Unterlauf des Amu-Darya (Aral-See)
latinisiert Algorismus

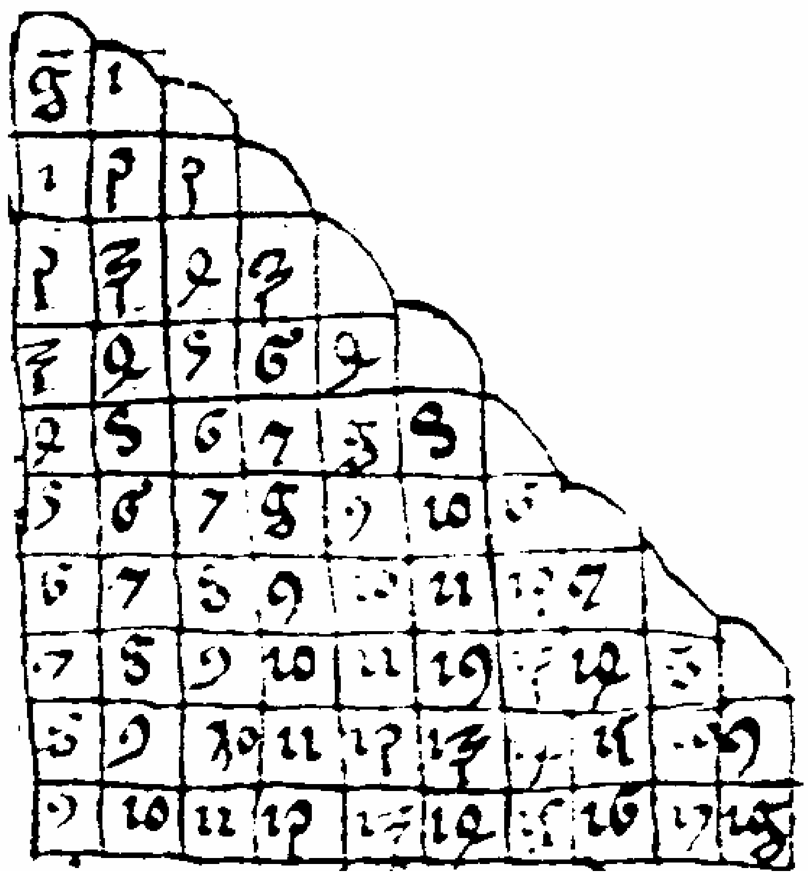
Liber ysagogarum (Einführung ins Quadrivium)
übersetzt von Adelhard von Bath (aktiv 1116-1142)
arab. nicht erhalten, nur in lat. Übersetzungen
(ed. Vogel 1963, Allard 1992)
Algorismus =
Anleitung zum Rechnen mit arab. Zahlen
Einführung der 0 aus der indischen Mathematik

Anleitungen zum Rechnen mit arab. Zahlen
oft als erster Teil einer Einführung ins Quadrivium
oder in die Astronomie
Denn: Voraussetzung für astronom. Tafeln
Astronomische Tafeln übers. von Adelhard 1126

2.1 „Exponentenaddition“ bei der Multiplikation von Sexagesimalbrüchen bei al-Khwarizmi / Adelhard *Liber ysagogarum Algorismi*

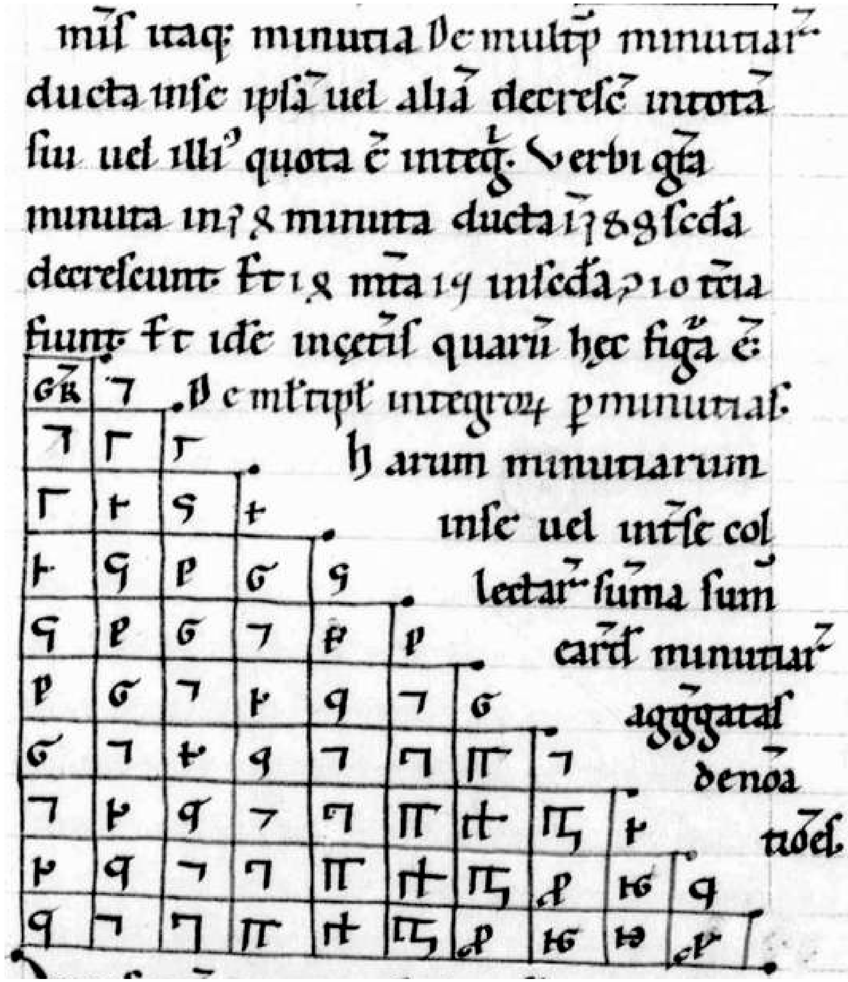


(Clm 13021, 28ra)



Tafeln zur Multiplikation von Sexagesimalbrüchen durch Addition der „Exponenten“
(cf. Cappelli 422 zu *12*)
z. B. $(1/60)^2 \cdot (1/60)^3 = (1/60)^{2+3} = (1/60)^5$
(Cod. Paris. lat. 16208, 68ra)

2.1 „Exponentenaddition“ bei der Multiplikation von Sexagesimalbrüchen bei al-Khwarizmi / Adelhard *Liber ysagogarum Algorismi*



De multiplicatione minutiarum
[O]*mnis itaque minutia*
ducta in se ipsam uel aliam decrescit in totam
sui uel illius quota est integri. Verbi gratia [12]
minuta in 24 minuta ducta in 288 secunda
decrescunt. Et 14 minuta 15 in secunda 210 tertia
fiunt. Et idem in ceteris]*quarum haec figura est*[.
Harum minutiarum
in se uel inter se col
lectarum summa sumit
earundem minutiarum
aggregatas
denomina
tiones.
(Clm 13021, 28ra; Edition Allard 1992)

2.1 „Exponentenaddition“ bei der Multiplikation von Sexagesimalbrüchen bei al-Khwarizmi / Adelhard *Liber ysagogarum Algorismi*

Multiplikation von Sexadezimalbrüchen

Jeder Bruch, der mit sich selbst oder mit einem anderen Bruch multipliziert wird, nimmt auf eine [sc. *descriptio*, Bennennung] ab, die so groß [*totam*] wie [*quota*] die ganze Zahl [Exponent] von ihm selbst oder [und] vom anderen ist.

12´ · 24´ = 288´´; 14´ · 15´´ = 210´´´

Beispiel: 12 *minuta* multipliziert mit 24 *minuta* nehmen auf 288 *secunda* ab und 14 *minuta* mal 15 *secunda* ergeben 210 *tertia* usw.

Das Ergebnis [*summa*] dieser mit oder unter sich multiplizierten Brüche nimmt [als Benennung] ihre addierten [*aggregatas*] Benennungen [*denominationes*, Exponenten] an, die in der folgenden Tabelle angegeben sind.

2.2 Endl. geom. Reihen bei „Alkuin“, *Propositiones ad acuendos iuvenes*

Nr. 13 und Nr. 41
(Folkerts 1978, S. 37, 51f., 69)

keine Formel,
Aufzählung
der Zwischenergebnisse

im *Algorismus Ratisbonensis*

Schachbrettaufgabe, Nr. 319
Verkauf einer Kuh nach Klauen, Nr. 317
Verkauf eines Pferdes nach Hufnägeln, Nr. 318
Nr. 274

(Vogel 1954)

nur Lösung ohne Angaben zur Berechnung

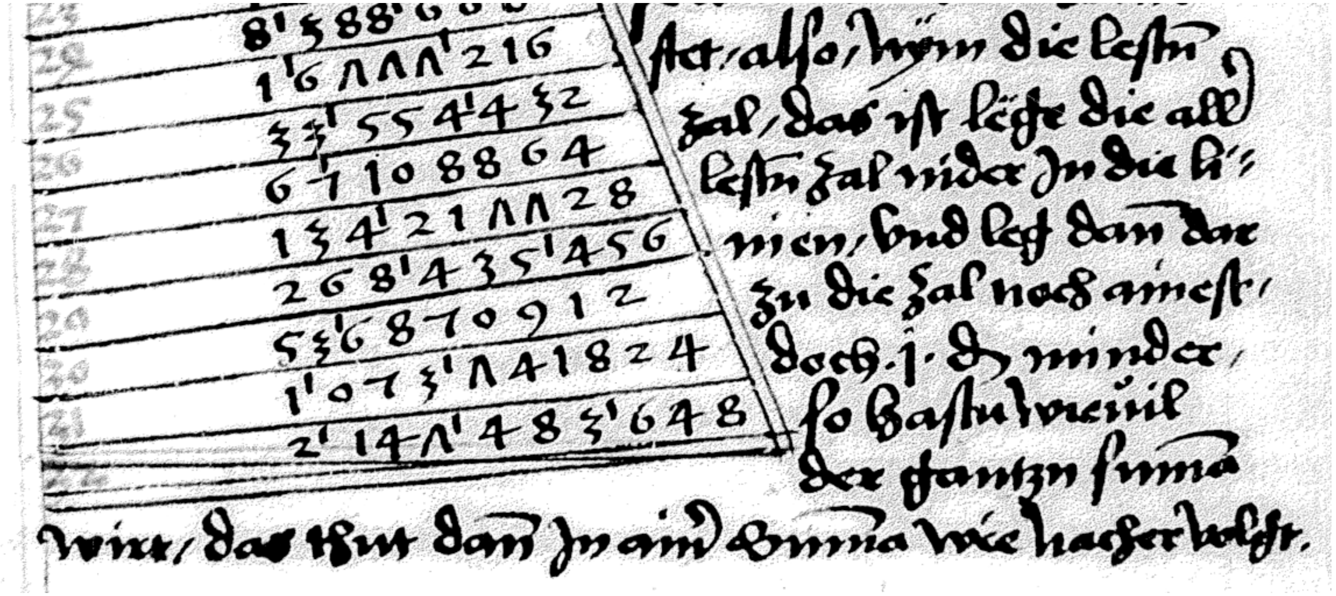
2.3 Endl. geom. Reihe im *Tegernseer Linienrechenbuch*

Cgm 740, ~1480

[…] *also/ Nym die lesten*
zal/ das ist lëge die aller
lesten zal nider in die li=
nien/ vnd leg dann dar
zu [addiere] *die zal noch ainest/*
doch .1. ϑ minder/
so hastu wieuil
der gantzn summa
wirt/ das thut dann In ainer
Summa wie nacher volgt.

Summenformel

$$2^{n-1} + 2^{n-1} - 1$$



Geometrische Zweierprogression
im *Tegernseer Linienrechenbuch*:
Pferdeverkauf nach Hufnägeln (wie *Alg. Rat.*).
In der Tabelle links steigend die Zweierpotenzen,
bei Nr. 25 etwa steht 16777216 = 2^{24}
(Cgm 740, 33v; Edition Kaunzner 1970, S. 16)

2.4 Endl. geom. Reihen bei Johann Kandler

Arithmetica 1578, Cii-ii’

Summenformel

$$aq^0 + \ldots + aq^n =$$
$$a(q^{n+1} - 1)/(q - 1) =$$
$$(aq^n \cdot q - a)/(q - 1)$$

Multiplicir die letzte zal mit der vbertrettung/
dauon die proportion den namen hat/ vom product nimm die erst zal/ das
Rest diuidir durch die vbertrettung weniger
eins/ der quotient zeigt dir die summam […]

In der Geometriſchen Progreſſion / vbertrit eine zal die ander in einer gleichen geſchickligkeit oder proportion / alſo / ſo offt die ander die erſt zal in ſich ſchlieſſet / ſo offt ſchlieſt die dritt die ander / die vierd die dritt/die fünffte die viert ꝛc. in ſich/ Als 1. 2. 4. 8. 16. 32. Iſt progreſſio in dupla proportione 1. 3. 9. 27. 81. Iſt progreſſio in tripla proportione. Item 2. 8. 32. 128. 512. iſt Progreſſio quadruple proportionis. Solche vnd dergleichen Progreſſiones kurtz in eine ſumma zubringen / Multiplicir die letzte zal mit der vbertrettung / dauon die proportion den namen hat / vom product nim̃ die erſt zal/ das Reſt diuidir durch die vbertrettung weniger eins/ der quotient zeigt dir die ſummam / Als

2.4 Endl. geom. Reihen bei Johann Kandler

Arithmetica 1578, Ciii'-iv

Produkt von Folgengliedern

$$aq^n \cdot aq^m \,/\, a = aq^{n+m}$$

Wenn du zwo zalen mit einander mul=
tiplicirst/ vnd mit der ersten kleinesten
diuidirest/ so zeugen dir die zwo ziffer
vber den gemultiplicirten zalen/ so man sie
zusamen addirt/ die zal/ dahin der quotient ge=
hört/

WJt zalen solcher vnnd dergleichen pro-
gression / als in disem Exempel die 32.
zal oder Nagl / fürderlich zusuchen/ stell
etliche zalen der progression / souil du wilt/
verzeichne sie mit Ziffern natürlicher ord-
nung / setz vber die erst progression zal ein 0.
vber die ander 1. vber die dritt 2. vber die viert
3. etc. Also.

0	1	2	3	4	5
1.	3.	9.	27.	81.	243.

WEnn du zwo zalen mit einander mul-
tiplicirst/ vnd mit der ersten kleinesten
diuidirest/ so zeugen dir die zwo ziffer
vber den gemultiplicirten zalen / so man sie
zusamen addirt/ die zal/ dahin der quotient ge-
hört / Als multiplicir 81. mit 243. kombt
19683. diuidire mit der ersten zal / so komen
19683 an die 9 zal der progression/ dann jre
zwo vbergeschribene zalen / als 4. vnnd 5.
machen 9.