I. Quadrivium

II. Al-Khwarizmis Musik

1. Proportionen
2. Tonstufen

III. Astronomie: Proportionen

1. Sphärenmusik
2. Proportionen

IV. Rithmomachie

1. Zahlenkampfspiel
2. Harmonisches Mittel

V. Architektur

Alfred Holl

Das Quadrivium im Mittelalter

Teil 3: Musik und Proportionenlehre

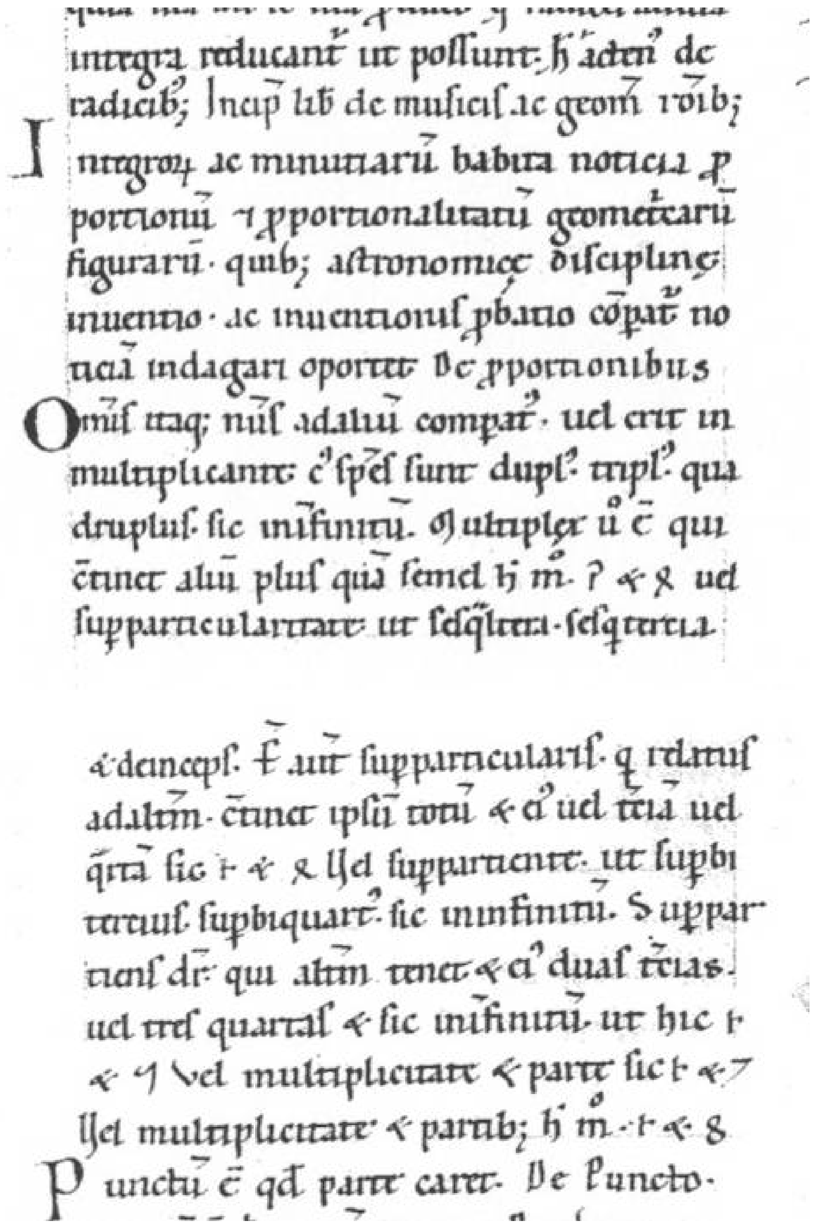
Die Regensburg-Prüfeninger Fassung
von al-Khwarizmis *Liber ysagogarum*

II. Musik im Quadrivium

(Kathedrale León)

II.1 Gegenstand der Musik: Proportionen

Clm 13021, 29v



Merkwürdige Ausdrücke
multiplex: duplus, triplus etc.
superparticularis:
  sesquialter, sesquitertius
superpartiens:
  superbitertius, superbiquartus

II.1 Gegenstand der Musik: Proportionen

Clm 13021, 29v

Merkwürdige Ausdrücke
multiplex: duplus, triplus etc.
superparticularis:
sesquialter, sesquitertius
superpartiens:
superbitertius, superbiquartus

<u>Incipit liber de musicis ac geometricis rationibus</u>
Integrorum ac minutiarum habita notitia proportionum et proportionalitatum geometricarum figurarum, quibus astronomicae disciplinae inventio ac inventionis probatio comparatur, noticiam indagari oportet.

<u>De proportionibus</u>
Omnis itaque numerus ad alium comparatus vel erit in multiplicante: Cuius species sunt duplus, triplus, quadruplus, sic in infinitum. **Multiplex** vero est qui continet alium plus quam semel hoc modo: 2 et 4. Vel **superparticularitate**, ut sesquialtera (3/2), sesquitertia (4/3) et deinceps. Etiam autem **superparticularis**, qui relatus ad alterum, continet ipsum totum et eius vel tertiam (4/3) vel quartam (5/4), sicut 3 et 4. Vel **superpartiente**, ut superbitertius, (5/3), supertriquartus (7/4) (verschrieben: superbiquartus), sic in infinitum. **Superpartiens** dicitur (?) qui alterum tenet et eius duas tertias (1 2/3) vel tres quartas (1 3/4) et sic in infinitum, ut hic 3 et 5 (?). Vel **multiplicitate et parte** (multiplex superparticularis), sic 3 et 7 (3 1/7). Vel **multiplicitate et partibus** (multiplex superpartiens) hoc modo 3 et 8 (3 7/8 ?).

II.1 Gegenstand der Musik: Proportionen

ῥυθμός	Zahlenverhältnis, Proportion (Es gibt noch keine Bruchrechnung!)
<u>römische Tradition</u> (bis zum Spätmittelalter in Mitteleuropa relevant)	keine für Arithmetik geeignete Zahldarstellung Proportionenlehre Teil der Arithmetik z.B. Boethius, *Institutio arithmetica et musica*
<u>arabische Tradition</u> (erst ab dem Spätmittelalter in Mitteleuropa relevant)	für Arithmetik geeignete Zahldarstellung Proportionenlehre Teil der Musik z.B. al-Khwarizmi
<u>griechische Tradition</u>	klassisch: keine Trennung Arithmetik – Musik Neupythagoreer, z.B. Nikomachos von Gerasa (~60-~120) *Ἀριθμητική εἰσαγωγή*, Iamblichos Chalcidensis (~245-~325)

II.1 Gegenstand der Musik: Proportionen

Beispiel

(Numerus) superparticularis
ἐπιμόριος
„überteilig“
ein Ganzes und ein Teil
τὸ μέρος ‘Teil’

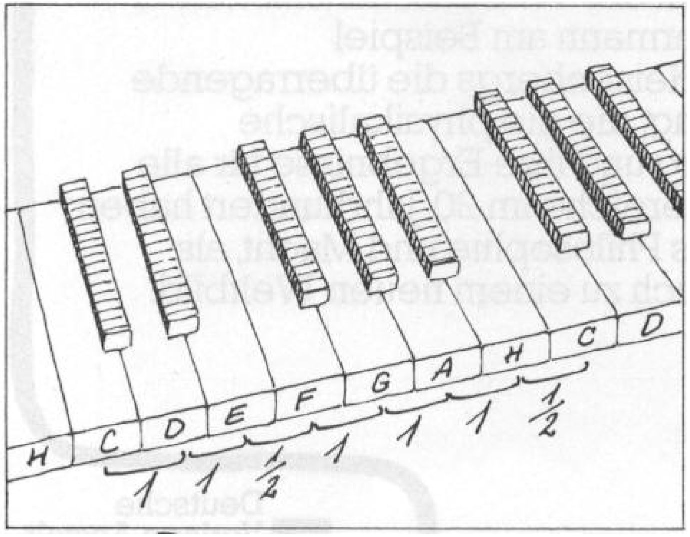
z.B. für Zinsrechnung
für Frequenzverhältnisse
in der Musik

Superparticularis	(n+1)/n = 1+1/n
sesqu(i)alter ἡμιόλιος	3/2
sesquitertius, supertertius ἐπίτριτος	4/3
sesquiquartus, superquartus ἐπιτέταρτος	5/4
sesquiquintus, superquintus ἐπίπεμπτος	6/5
sesquisextus, supersextus ἔφεκτος	7/6
sesquiseptimus, superseptimus ἐφέβδομος	8/7
sesquioctavus, superoctavus ἐπόγδοος	9/8
sesquinonus, supernonus ἐπέν(ν)ατος	10/9

II.2 Tonstufen: Idealzustand

diatonisch:
7 Tonschritte einer Tonleiter
reine Stimmung

Für das Ohr angenehme Frequenzverhältnisse entsprechen meist Superparticularis-Proportionen.



C-Dur	Tonstufe, Intervall	Frequenz-verhältnis
c	Prim	1/1
d	Sekund	9/8
e	Terz	5/4
f	Quart	4/3 stabil
g	Quint	3/2 stabil
a	Sext	5/3
h	Septim	15/8
c	Oktav	2/1 stabil

Intervall-Addition = Proportions-Multiplikation

Musikgeschichtlich immer stabile Proportionen:
Quint (3/2) + Quart (4/3) = Oktav (2/1)

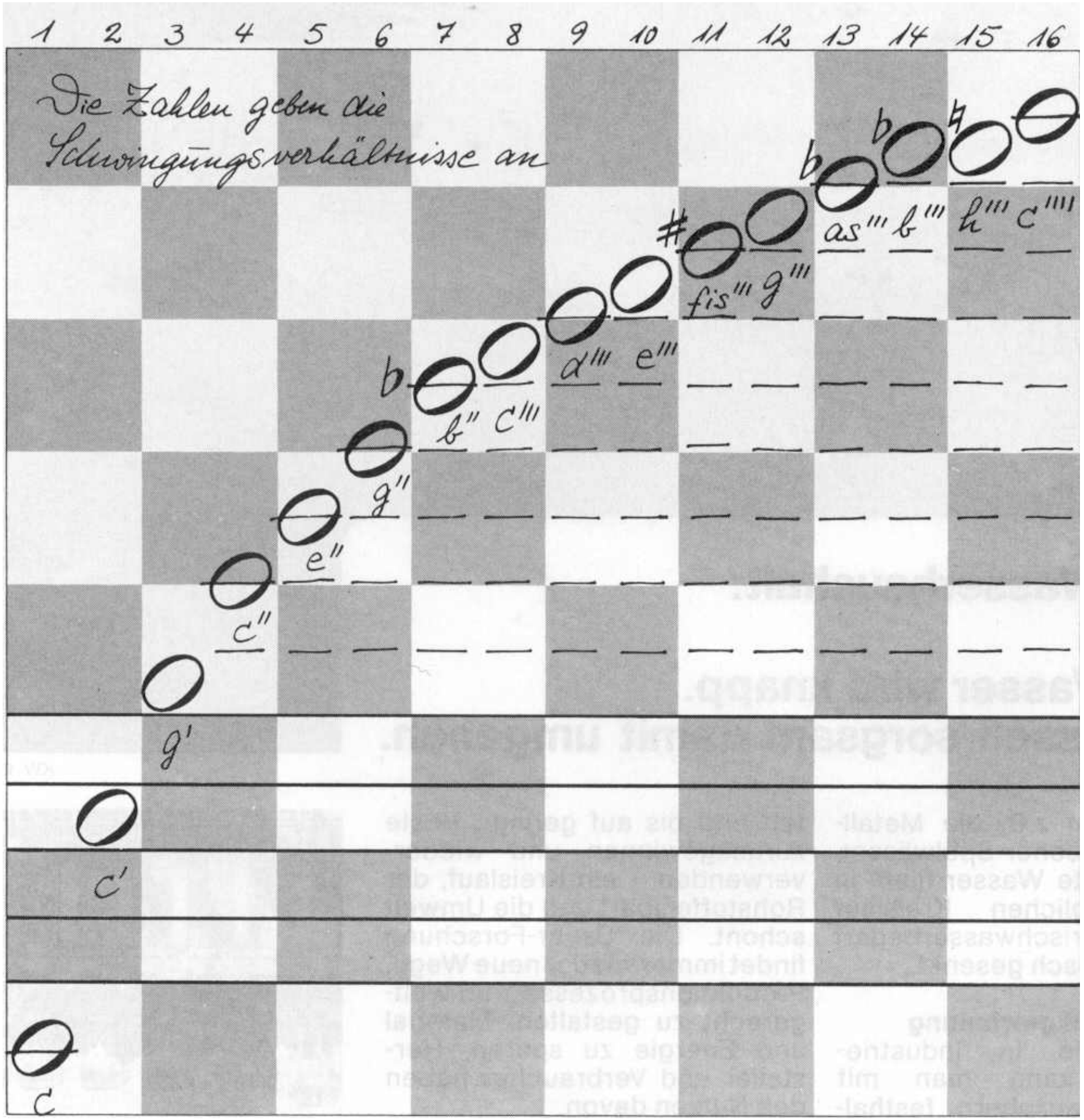
Andere Intervalle: unterschiedliche Proportionen!

II.2 Tonstufen: Idealzustand

Natur- oder Obertonreihe

(BdW 1978, 1)

Grundfrequenz ·2, ·3, ·4, ·5 etc.

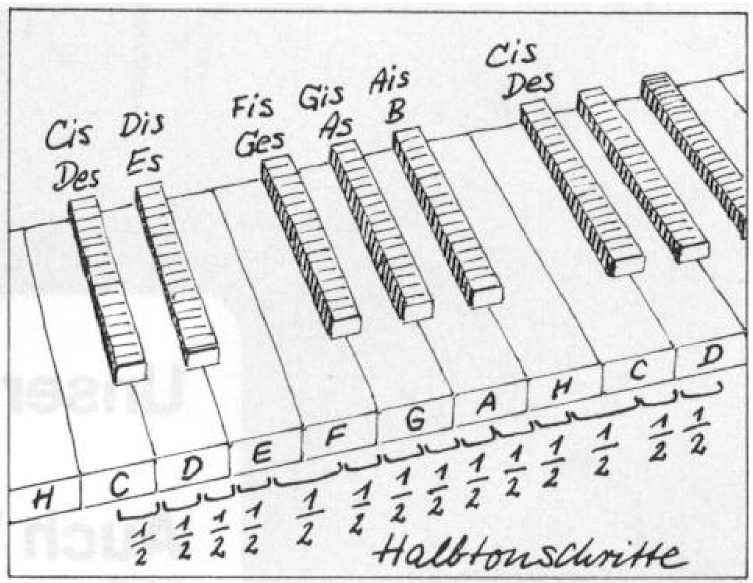


II.2 Tonstufen: Problem

12 verschiedene Tonarten im gleichen 12-Ton-Schema: Möglichkeit zur Transposition

chromatisch: Halbtöne zusätzlich zu einer Tonleiter

Stimmung ???



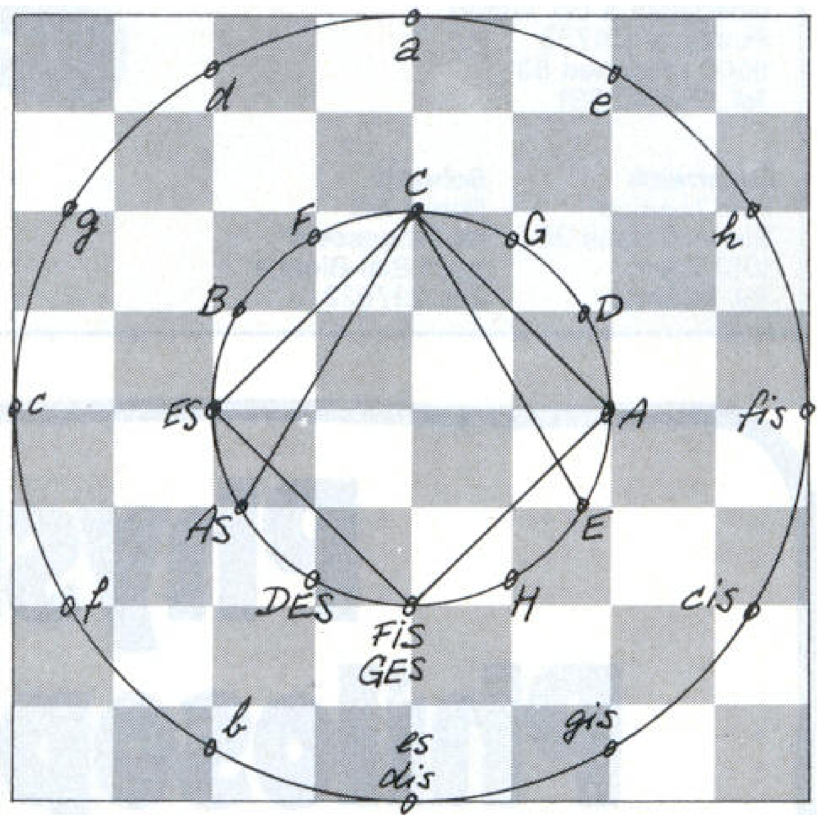
C-Dur	Halb-töne	Tonstufe, Intervall	Frequenz-verhältnis
c	0	Prim	1/1
cis, des	1	kleine Sekund	16/15
d	2	(große) Sekund	9/8, (10/9)
dis, es	3	kleine Terz	6/5
e	4	(große) Terz	5/4
f	5	Quart	4/3
fis, ges	6	vermind. Quint Tritonus	45/32 729/256
g	7	Quint	3/2
gis, as	8	verminderte Sext ~ gold. Schn., 833 c	8/5 1,618
a	9	Sext	5/3
ais, b	10	verminderte Septim	9/5, 16/9
h	11	Septim	15/8
c	12	Oktav	2/1

Frequenzverhältnis = 1 / Saitenlängenverhältnis

II.2 Tonstufen: Problem

Quintenfolge

Quintenzirkel



→ pythagoreisches Komma

C-Dur: Dreiklang c – e – g

c   c : c = 1/1

g   g : c = 3/2

1 Cent = 1/100 Halbton = $\sqrt[1200]{2} \approx 1{,}00057779$

Centzahl := 1200 · log (f_1/f_2) / log 2

$(\sqrt[1200]{2})^{\text{Centzahl}} = f_1/f_2$

Cent-Rechner: z.B. sengspielaudio

II.2 Tonstufen: Problem

pythagoreisches Komma	12 Quinten = 7 Oktaven aber $(3/2)^{12} : 2^{7} \approx 1{,}013643\ldots \approx 74/73 \approx 23{,}46$ c
enharmonisches Komma kleine Diesis	3 große Terzen = 1 Oktav aber $(5/4)^{3} : 2 = 125/128 = 1{,}024 \approx 41{,}058858$ c
große Diesis	4 kleine Terzen = 1 Oktav aber $(6/5)^{4} : 2 = 648/625 = 1{,}0368 \approx 2{,}565148$ c

II.2 Tonstufen: Problem

Ganztöne

kleiner Ganzton + großer G. = große Terz

$9/8 \cdot 10/9 = 5/4 \approx$ 386,314 c

Ganzton: 2 Quinten um eine Oktave erniedrigt:

$3/2 \cdot 3/2 : 2 = 9/8$

verschiedene Ganztöne (groß und klein):

$e : d = (e : c) : (d : c) = 5/4 : 9/8 = 5/4 \cdot 8/9 = 10/9$

aber $d : c = 9/8$ (Ditonus $9^2/8^2$ > große Terz)

G-Dur: Dreiklang g – h – d

g $g : c = 3/2$

d $d' : g = ((d' : c') : (c : c')) : (g : c) =$

$= (9/8 : 1/2) : 3/2 = 9/4 \cdot 2/3 = 3/2$

d.h. $d : c = 9/8 \approx 203{,}91$ c (großer Ganzton)

D-Dur: Dreiklang d – fis – a

d $d : c = 9/8$ oder $10/9$

a $a : d = (a : c) : (d : c) =$

$= 5/3 : 10/9 = 5/3 \cdot 9/10 = 3/2$

d.h. $d : c = 10/9 \approx 182{,}404$ c (kleiner Ganzton)

II.2 Tonstufen: Problem

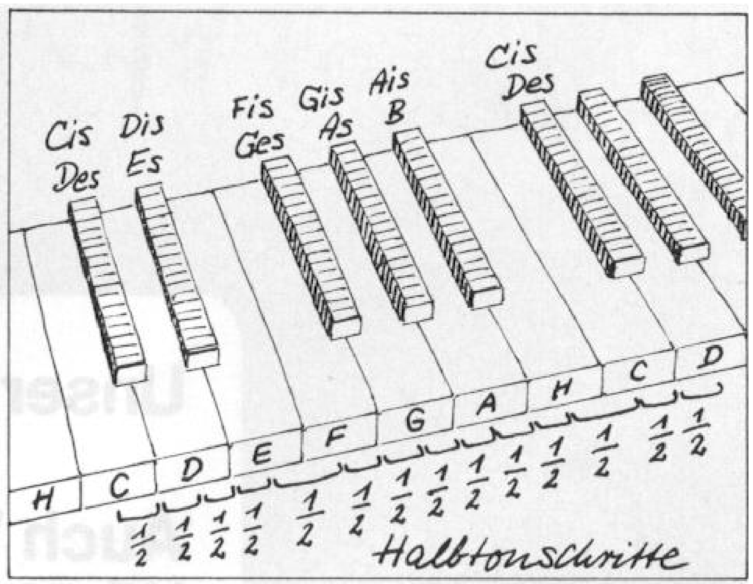
Pythagoreische Halbtöne

Limma: kleiner Halbton diatonischer Halbton *semitonium minus*	Def.: Quart – Ditonus $4/3 : (9/8 \cdot 9/8) = 2^8 / 3^5 = 256/243 \approx 1{,}053\ldots \approx$ $\approx 90{,}225$ c
Apotome: großer Halbton chromatischer Halbton *semitonium maius*	Def.: 7 Quinten (49 Ht.) – 4 Oktaven (48 Ht.) $(3/2)^7 / 2^4 = 3^7 / 2^{11} = 2187/2048 \approx 1{,}068\ldots \approx$ $\approx 113{,}685$ c
Limma + pyth. Komma = Apotome	$(2^8 / 3^5) \cdot ((3/2)^{12} / 2^7) = 3^7 / 2^{11}$
Limma + Apotome = großer Ganzton	$(2^8 / 3^5) \cdot (3^7 / 2^{11}) = 3^2 / 2^3 = 9/8 = 1{,}125 \approx$ $\approx 203{,}91$ c

II.2 Tonstufen: Kompromiss

enharmonische Umdeutung
cis = des, dis = es etc.

wohltemperierte Stimmung
12 gleiche Schritte zu $\sqrt[12]{2}$



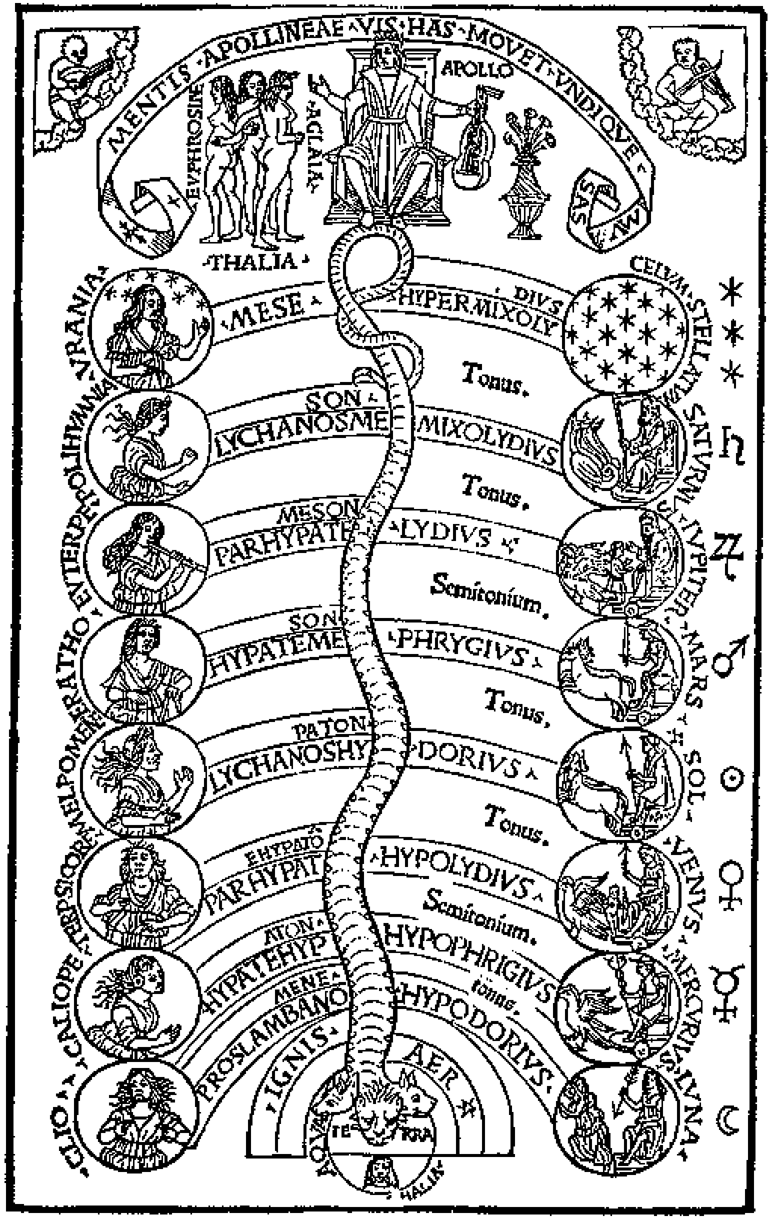
Ha Tö	lb ne	Tonstufe, Intervall	wohl-temp.	wohl-temp.	pyth. Cent
c	0	Prim	$(\sqrt[12]{2})^0$	1,0	0
cis	1	kl. Sekund	$(\sqrt[12]{2})^1$	1,059463	
d	2	(g.) Sekund	$(\sqrt[12]{2})^2$	1,122462	203,910
dis	3	kl. Terz	$(\sqrt[12]{2})^3$	1,189207	315,641
e	4	(gr.) Terz	$(\sqrt[12]{2})^4$	1,259921	386,314
f	5	Quart	$(\sqrt[12]{2})^5$	1,33484	498,045
fis	6	vm. Quint Tritonus	$(\sqrt[12]{2})^6 = \sqrt[2]{2}$	1,414214	
g	7	Quint	$(\sqrt[12]{2})^7$	1,498307	701,955
gis	8	verm. Sext	$(\sqrt[12]{2})^8$	1,587401	
a	9	Sext	$(\sqrt[12]{2})^9$	1,681793	
ais	10	vm. Septim	$(\sqrt[12]{2})^{10}$	1,781797	
h	11	Septim	$(\sqrt[12]{2})^{11}$	1,887749	
c	12	Oktav	$(\sqrt[12]{2})^{12}$	2,0	1200,00

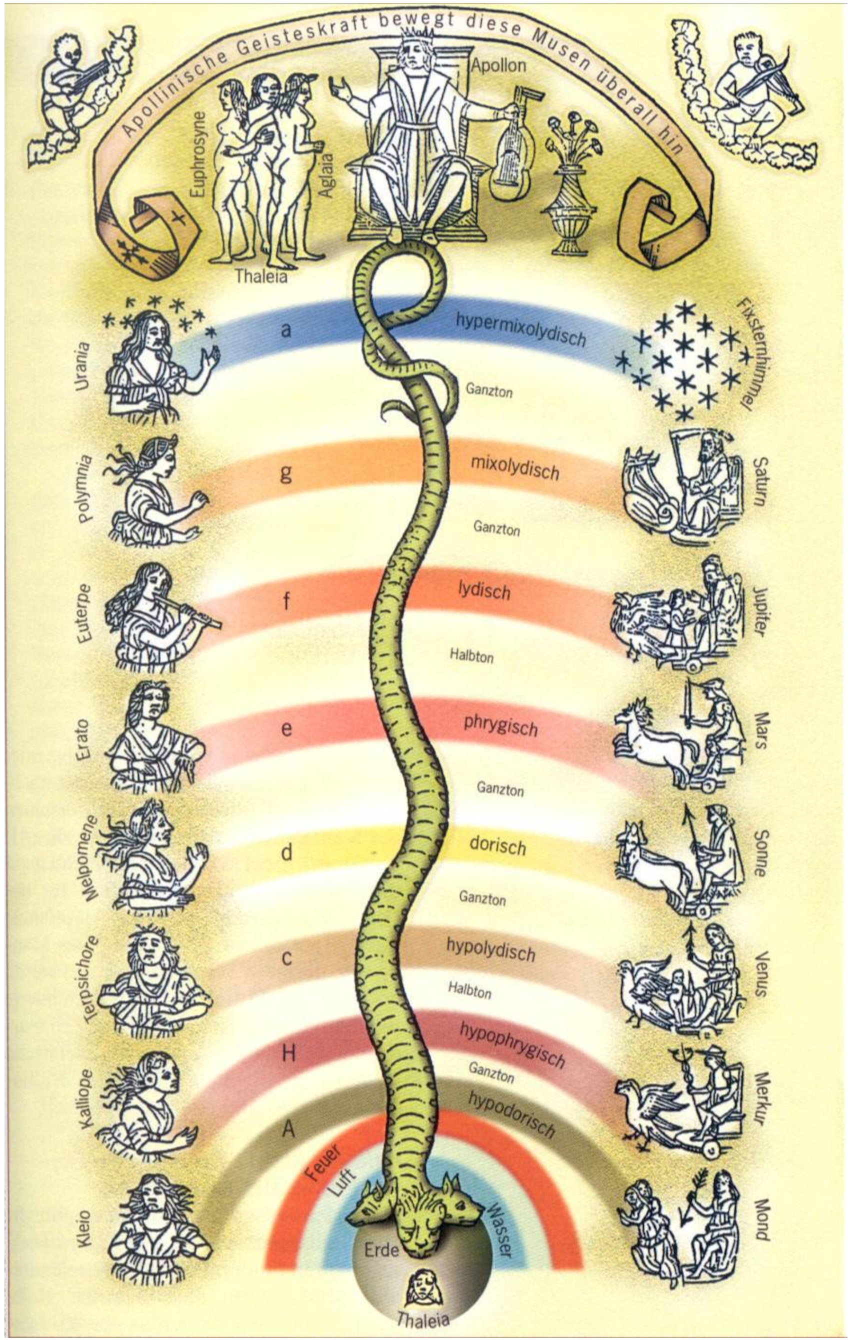
1 Cent = 1/100 Halbton = $\sqrt[1200]{2} \approx 1{,}00057779$

II.1 Weitere Proportionen

multiplex – πολλαπλάσιος ein ganzzahliges Vielfaches	Beispiel: $1 \cdot 4 = 4$ quadruplus – τετραπλοῦς
superpartiens – ἐπιμερής ein Ganzes + (alle - ein) Teil 5/3, 7/4, 9/5, 11/6, 13/7, 15/8	$(2n+1)/(n+1) = 1 + n/(n+1) = 2 - 1/(n+1)$ Beispiel: $1 + 4/(4+1) = 1 + 4/5 = 9/5 = 2 - 1/5$ superquadripartiens, superquadriquintus – ἐπιτετραμερής, ἐπιτετράπεμπτος
multiplex superparticularis mehrere Ganze und ein Teil	Beispiel: $1 + 1 + 1 + 1/4$ triplex sesquiquartus
multiplex superpartiens mehrere Ganze - ein Teil	Beispiel: $1 + 1 + 1 + 4/5$ triplex superquadripartiens
Sonderfälle (Nikomachos)	ἐπιτρί-πεμπτος 1 3/5 ἐπιτετρα-έβδομος 1 4/7 ἐπιπεντ-έννατος 1 5/9

III.1 Sphärenmusik

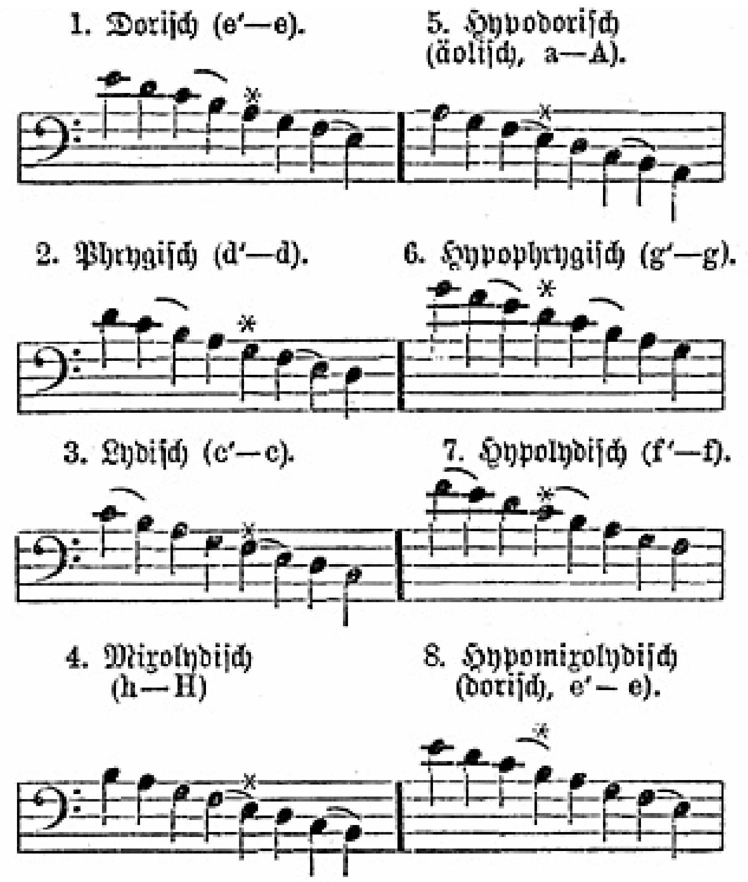




Bezeichnungen im Mittelalter gegenüber der Antike teilweise vertauscht
(Sachs, Musik der Antike, 12)

Franchinus Gafurius (1451-1522)
aus Lodi, Lombardei
Practica musicae
(SdW Spezial 2/2002 Forschung und Technik im Mittelalter)

III.1 Sphärenmusik



Hyperdorisch = Mixolydisch
Hypophrygisch = Ionisch

Griechisches σύστημα (Doppeloktav) τέλειον

Quart stärker als Oktav:
Viertongruppen, Viersaitengruppen: Tetrachord

2 Viertongruppen nacheinander → Oktav

Tonleitern abwärts

„Hypo"-Tonart eine Quint tiefer als Tonart

„Hyper"-Tonart eine Quint höher als Tonart

Sachs, Musik der Antike, 14-15

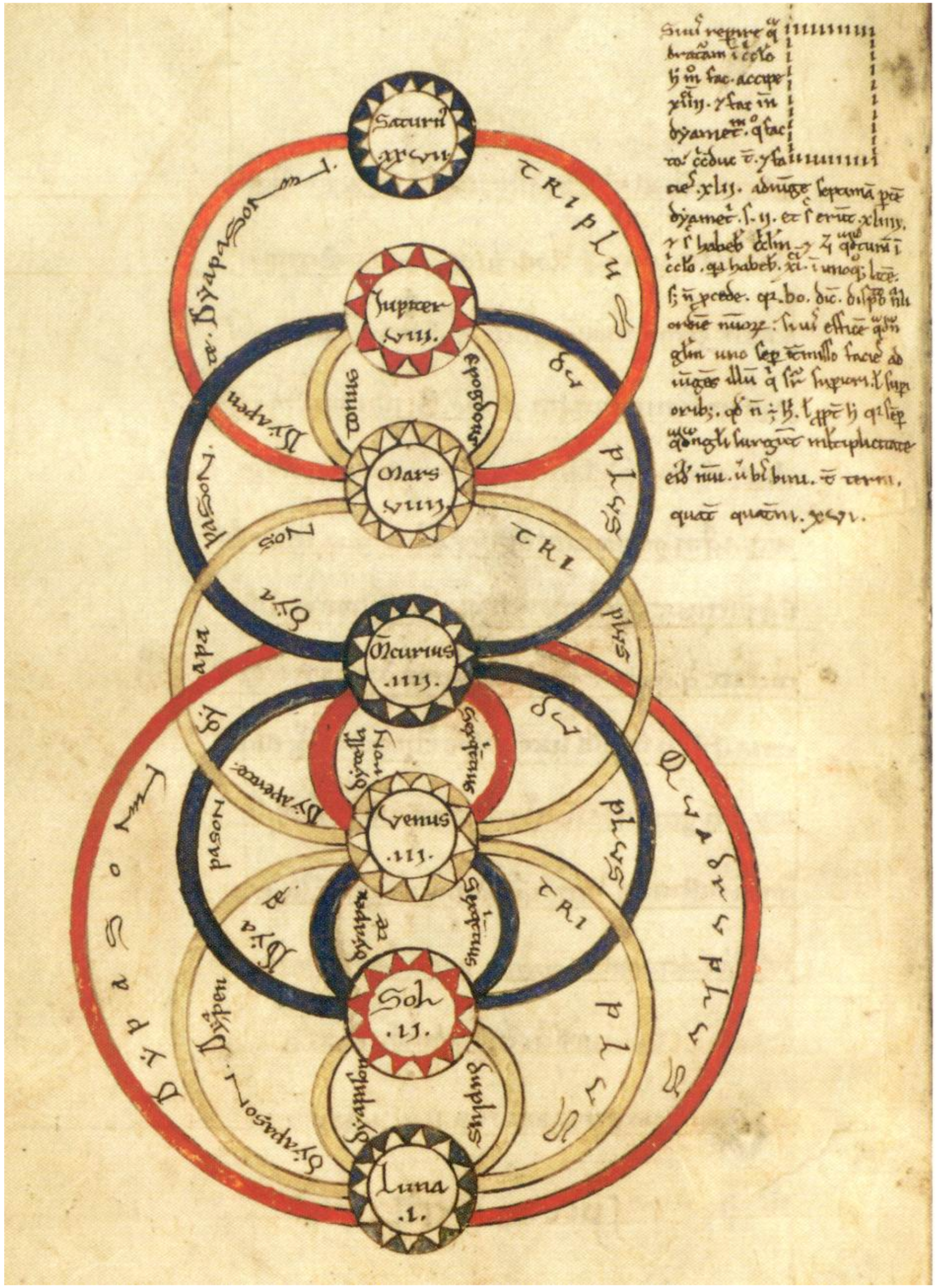
III.1 Sphärenmusik

Planeten und Tonintervalle

z.B. *diapason duplus* (2 Oktaven) zwischen Sonne und Merkur

ἡ διατεσσάρων Quart
ἡ διάπεντε Quint
ἡ διαπασῶν Oktave
(ἡ διὰ πασῶν χορδῶν συμφωνία – ‚über alle Saiten')

sesquitertius 4/3; ἐπόγδοος 9/8



Platons Timaios,
übersetzt von Calcidius (~400)
MS Digby 23, 51v; 12. Jh.
(Edson, 2005, 11)

III.1 Sphärenmusik Kepler: *Harmonices mundi* 1619

Keplers Sphärenmusik

JOHANNES KEPLER veröffentlichte 1619 in seinem Werk „Harmonices Mundi" eine Beschreibung der Sphärenmusik nach exakten Gesetzen, sowie ihre musikalische Notierung. Er verband Zahlenverhältnisse mit Musik, speziell im astronomischen Bereich.
KEPLER ordnete jedem Planeten eine relative Umlaufgeschwindigkeit zu und anhand dieser jedem Planeten einen eigenen Ton. Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen und befinden sich somit mal im Perihel (in Sonnennähe) und mal im Aphel (in Sonnenferne). KEPLER berechnete nach den Verhältnissen der Perihel- und Aphelgeschwindigkeiten zu jedem Planeten die zugehörigen Intervalle.

Planet	Erde	Mars	Saturn	Jupiter	Venus	Merkur
Proportion	**27:28**	**5:6**	**9:10**	**9:10**	**80:81**	**3:4**

KEPLERS Zuordnung von Proportionen zu einzelnen Planeten

Die Verhältnisse der Aphel- und Perihelgeschwindigkeiten zwischen den Planeten entsprechen den folgenden Tonintervallen:

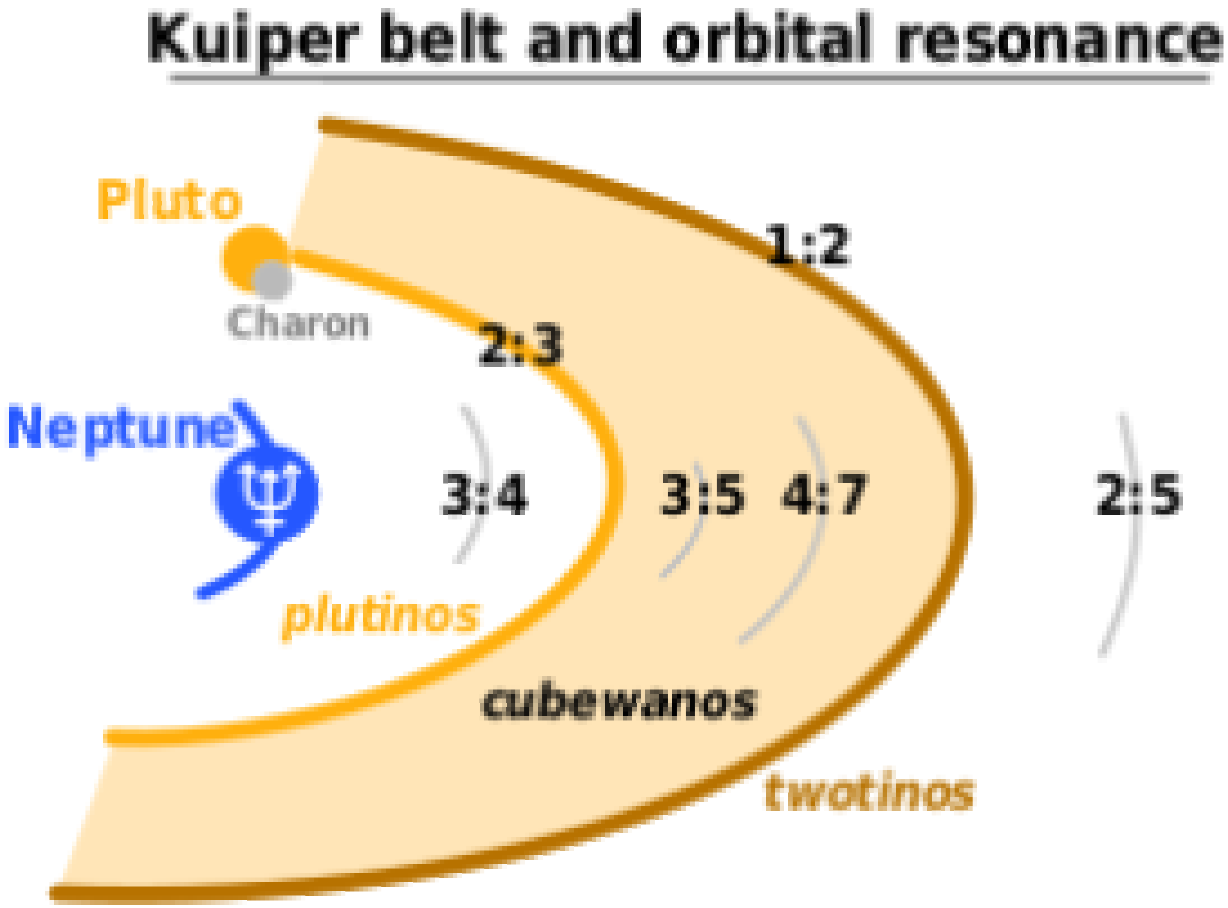
Planet im Aphel	Planet im Perihel	Verhältnis	Intervall
Saturn	Jupiter	1:3	Oktave + Quinte
Jupiter	Saturn	2:1	Oktave
Jupiter	Mars	1:8	drei Oktaven
Mars	Jupiter	24:5	zwei Oktaven + kl. Terz
Mars	Erde	5:12	Oktave + kl. Terz
Erde	Mars	3:2	Quinte
Erde	Venus	3:5	gr. Sexte
Venus	Erde	8:5	kl. Sexte
Venus	Merkur	1:4	zwei Oktaven
Merkur	Venus	5:3	gr. Sexte

Verhältnis der Aphel- und Perihelgeschwindigkeiten zweier Planeten nach KEPLER

(www.math-edu.de/Mathegarten/Mathe_Musik/Keplers_Sphaerenmusik.htm)

III.1 Sphärenmusik

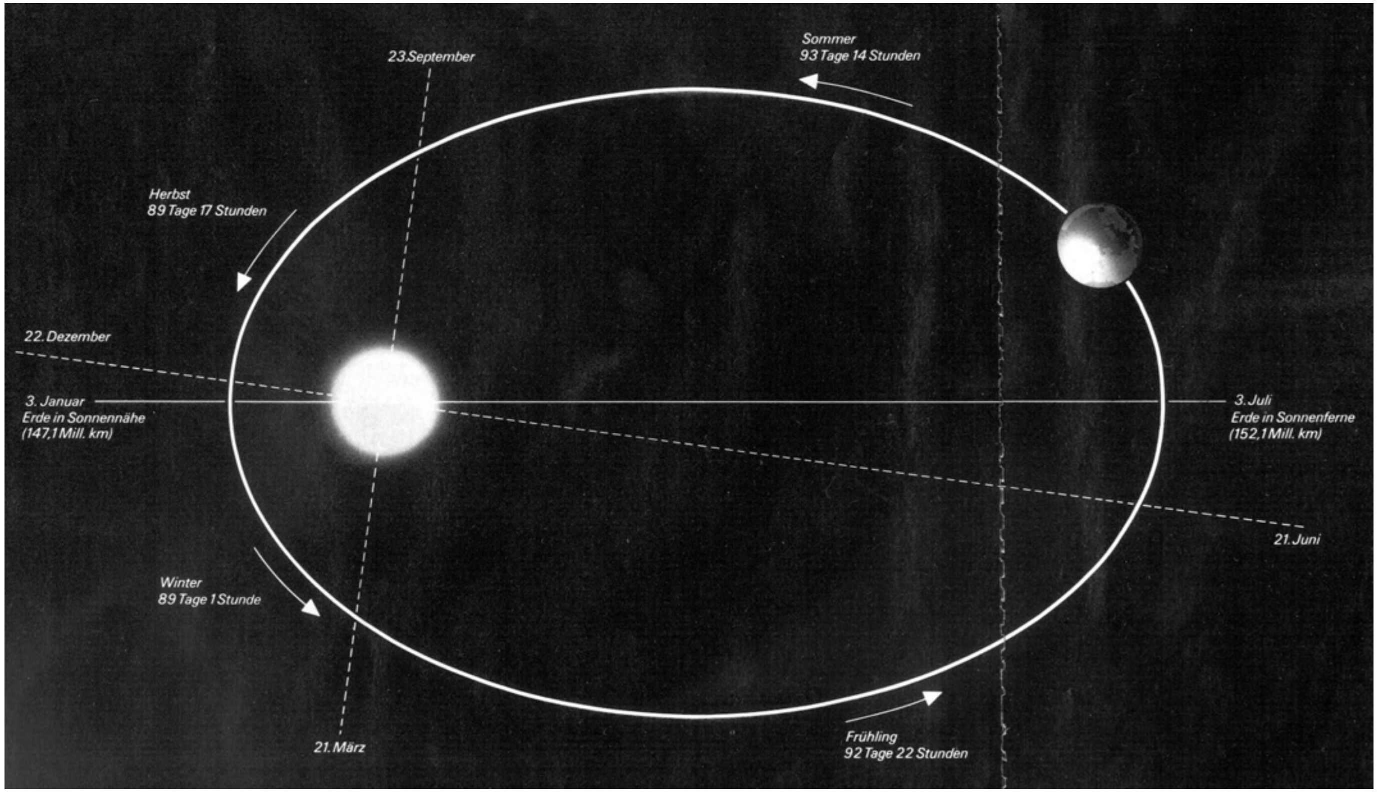
Gezeitenresonanzen
der Umlaufzeiten
von Kuipergürtel-Objekten

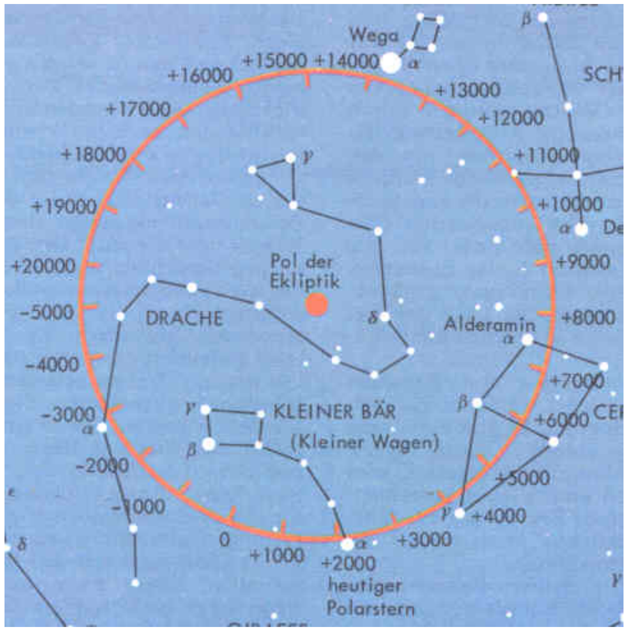


III.2 Proportionen: Meton

Zyklus von Meton (432 v.Chr.)
Lunisolarkalender

19 tropische (Kalender-)Jahre
≈ 235 synodische Monate
(Fehler ≈ 2,5 h)
≈ 254 siderische Monate





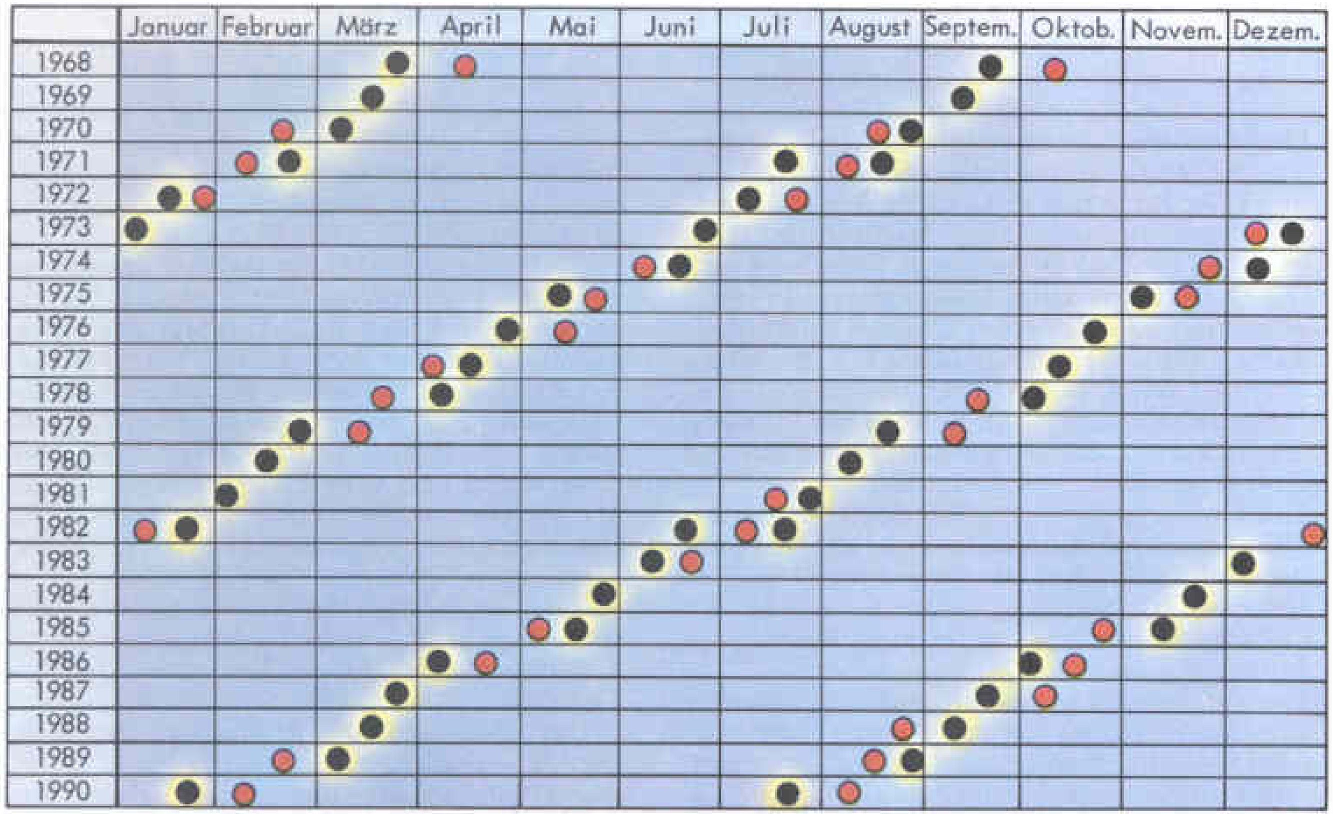
Siderisches Jahr 365,256d, tropisches Jahr 365,244d
Frühlingspunkt (Frühlings-Äquinoktien)
Tropisches Koordinatensystem und Präzession
bewegen sich im Uhrzeigersinn (Blick von N)
entgegen Rotation und Umlaufrichtung
(dtv-Atlas Astronomie, 1987, 62; BdW 1978, 1)

III.2 Proportionen: Saros

Saros-Zyklus
babyl. Maßeinheit
[Edmond Halley 1691]
Finsterniszyklus

242 drakonitische Monate
(= 18 a 10,3592 d)
≈ 223 synodische Monate
(Fehler ≈ 0,0376 d)

Schnittpunkte
Mondbahn – Ekliptik:
Mondknoten
caput draconis
‘aufsteigender Mondknoten’
cauda draconis
‘absteigender Mondknoten’



A Sonnenfinsternisse (schwarze Punkte) und Mondfinsternisse (rote Punkte) von 1968–1990

Mondbahnpräzession
Knotenlinie des Mondes bewegt sich entgegen der Umlaufrichtung des Mondes, pro Jahr etwa 20°
Gesamtumlauf 6798 d oder 18,61 Jahre
(dtv-Atlas Astronomie, 1987, 51-52)

III.2 Proportionen: Saros

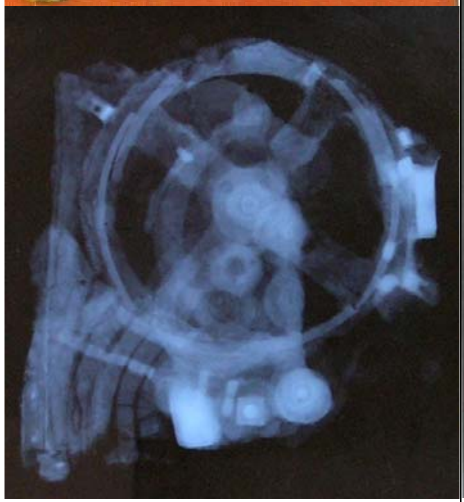
Ekliptik und Erde-Mond-Ebene

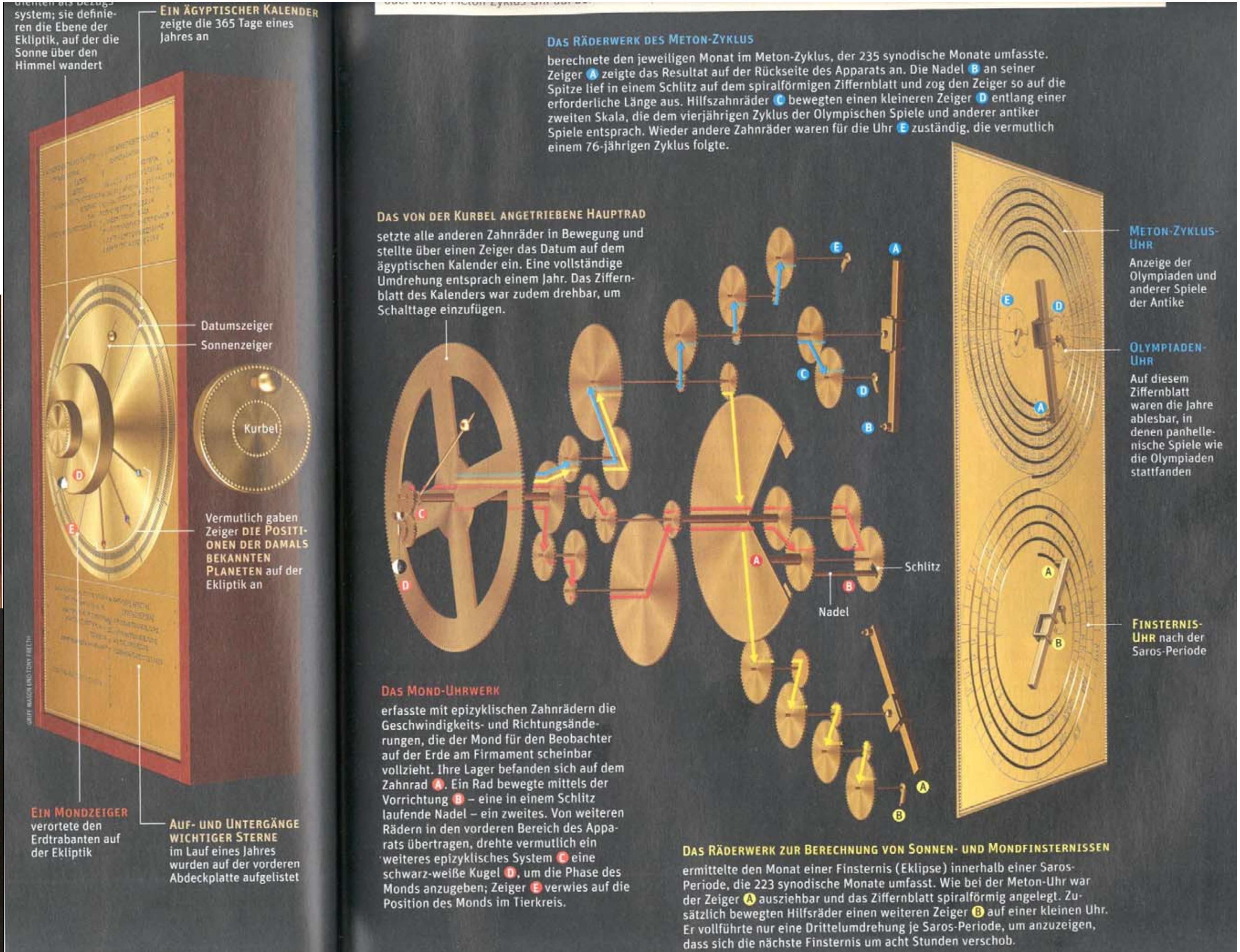
Armillarsphären (Musei Vaticani)

III.2 Proportionen

Räderwerk von Antikythera

(SdW 2010, 5)





system; sie definie-ren die Ebene der Ekliptik, auf der die Sonne über den Himmel wandert

Ein ägyptischer Kalender zeigte die 365 Tage eines Jahres an

Datumszeiger

Sonnenzeiger

Kurbel

Vermutlich gaben Zeiger **die Positionen der damals bekannten Planeten** auf der Ekliptik an

Ein Mondzeiger verortete den Erdtrabanten auf der Ekliptik

Auf- und Untergänge wichtiger Sterne im Lauf eines Jahres wurden auf der vorderen Abdeckplatte aufgelistet

Das Räderwerk des Meton-Zyklus

berechnete den jeweiligen Monat im Meton-Zyklus, der 235 synodische Monate umfasste. Zeiger A zeigte das Resultat auf der Rückseite des Apparats an. Die Nadel B an seiner Spitze lief in einem Schlitz auf dem spiralförmigen Zifferblatt und zog den Zeiger so auf die erforderliche Länge aus. Hilfszahnräder C bewegten einen kleineren Zeiger D entlang einer zweiten Skala, die dem vierjährigen Zyklus der Olympischen Spiele und anderer antiker Spiele entsprach. Wieder andere Zahnräder waren für die Uhr E zuständig, die vermutlich einem 76-jährigen Zyklus folgte.

Das von der Kurbel angetriebene Hauptrad

setzte alle anderen Zahnräder in Bewegung und stellte über einen Zeiger das Datum auf dem ägyptischen Kalender ein. Eine vollständige Umdrehung entsprach einem Jahr. Das Zifferblatt des Kalenders war zudem drehbar, um Schalttage einzufügen.

Meton-Zyklus-Uhr

Anzeige der Olympiaden und anderer Spiele der Antike

Olympiaden-Uhr

Auf diesem Ziffernblatt waren die Jahre ablesbar, in denen panhellenische Spiele wie die Olympiaden stattfanden

Schlitz

Nadel

Finsternis-Uhr nach der Saros-Periode

Das Mond-Uhrwerk

erfasste mit epizyklischen Zahnrädern die Geschwindigkeits- und Richtungsänderungen, die der Mond für den Beobachter auf der Erde am Firmament scheinbar vollzieht. Ihre Lager befanden sich auf dem Zahnrad A. Ein Rad bewegte mittels der Vorrichtung B – eine in einem Schlitz laufende Nadel – ein zweites. Von weiteren Rädern in den vorderen Bereich des Apparats übertragen, drehte vermutlich ein weiteres epizyklisches System C eine schwarz-weiße Kugel D, um die Phase des Monds anzugeben; Zeiger E verwies auf die Position des Monds im Tierkreis.

Das Räderwerk zur Berechnung von Sonnen- und Mondfinsternissen

ermittelte den Monat einer Finsternis (Eklipse) innerhalb einer Saros-Periode, die 223 synodische Monate umfasst. Wie bei der Meton-Uhr war der Zeiger A ausziehbar und das Ziffernblatt spiralförmig angelegt. Zusätzlich bewegten Hilfsräder einen weiteren Zeiger B auf einer kleinen Uhr. Er vollführte nur eine Drittelumdrehung je Saros-Periode, um anzuzeigen, dass sich die nächste Finsternis um acht Stunden verschob.

III.2 Proportionen: Umlaufzeiten der Planeten

Object	**Orbital period (revolution period)** [solar earth days]	**Average synodic period**	**Rotation period** [solar earth days]	**Solar planet days per planet year** (= sidereal planet days - 1)	**Solar planet day length** [solar earth days]
Mercury	87.970 days	46/145 a	58.6467 days	0.500000	175.940 days
Venus	224.70 days	8/5 a	- 243.02 days	- 1.92462	- 116.75 days
Earth	365.256 days	—	23 hr 56 min 4.1 sec	365.256	24 hr 0 min 0 sec
Moon	365.256 days		27.322 days	12.369	29.53 days
Mars	686.980 days	79/37 a	24 hr 37 min 22.66 sec	668.5994	24 hr 39 min 35.24 sec
Jupiter	4332.59 days	71/65 a	9 hr 55 min 30 sec	10475.8	9 hr 55 min 33 sec
Saturn	10759.22 days	59/57 a	10 hr 32 min 35 sec	24491.07	10 hr 32 min 36 sec
Uranus	30685.4 days		- 17 hr 14 min 24 sec	- 42718	- 17 hr 14 min 23 sec
Neptune	60189 days		16 hr 6.6 min	89666	16 hr 6.6 min
Pluto	90465 days		- 6 days 9 hr 17.6 min	- 14164.4	- 6 days 9 hr 17.0 min

*) sidereal planet days = rotations (360°) per planet year

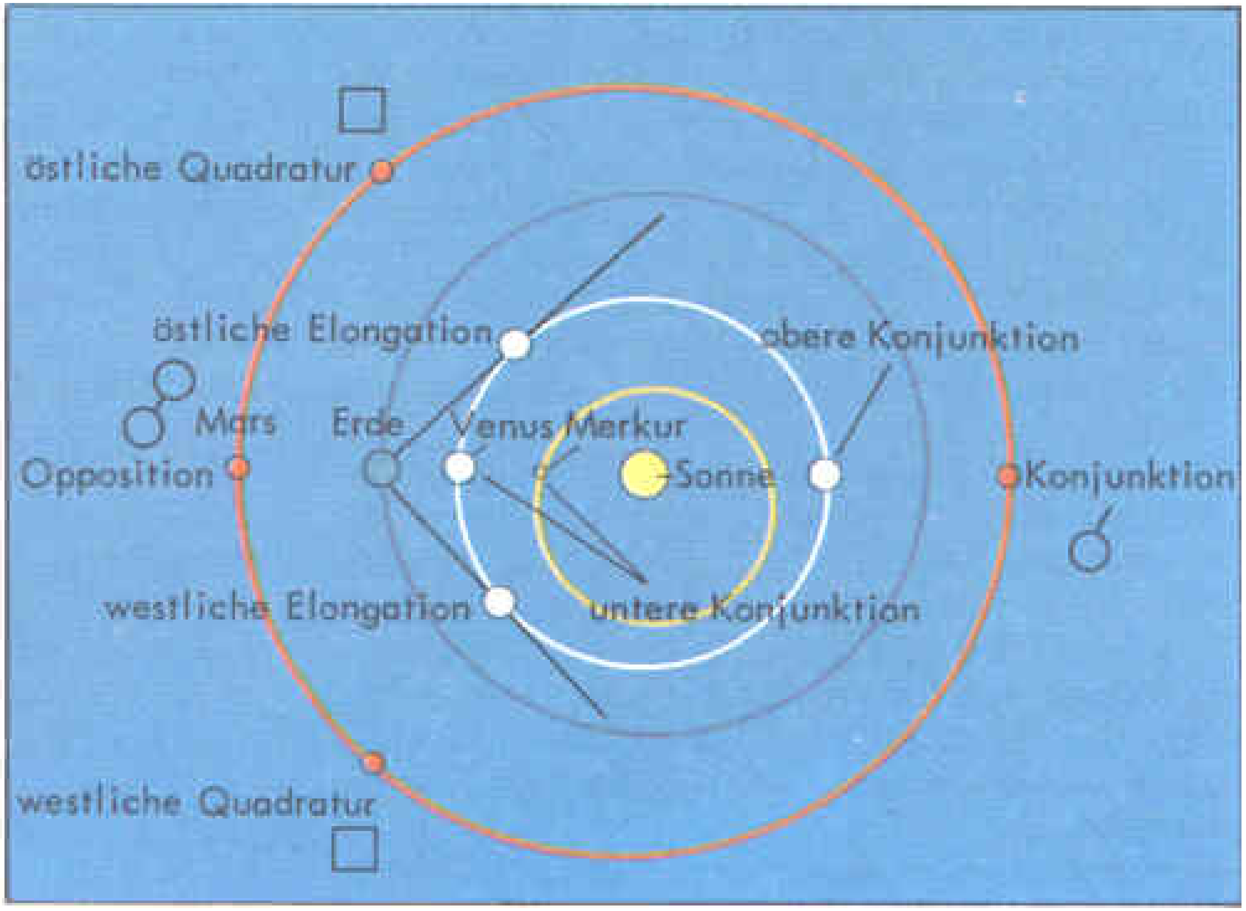
(ergänzt nach Courtney Seligman, www.cseligman.com)

Wie berechnet man Umlaufzeiten?

III.2 Proportionen:
Umlaufzeiten der Planeten

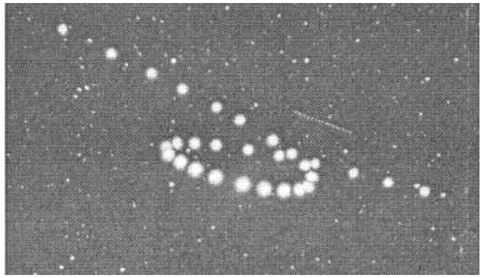
synodische Periode

Dauer von einer speziellen Konstellation bis zur nächsten, z.B. Konjunktion, Opposition

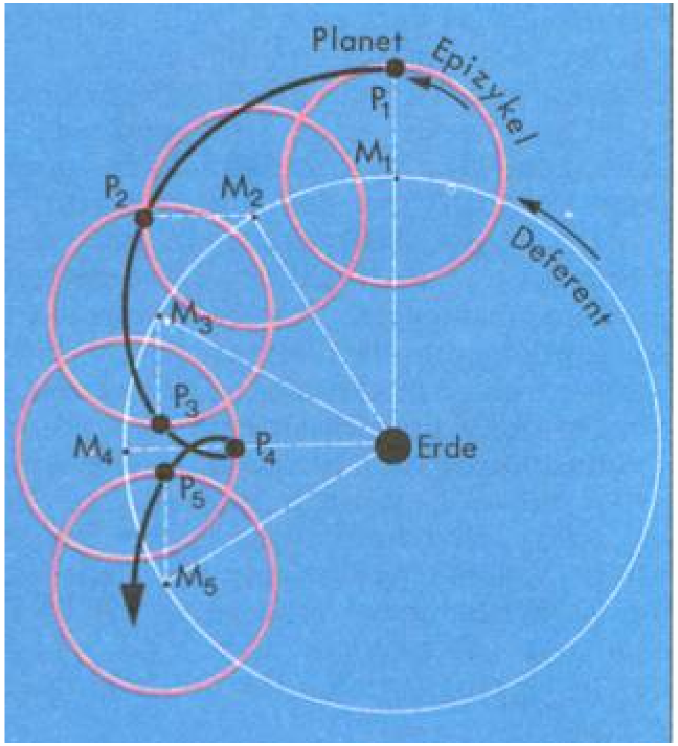


Konstellationen
(dtv-Atlas Astronomie, 1987, 54)

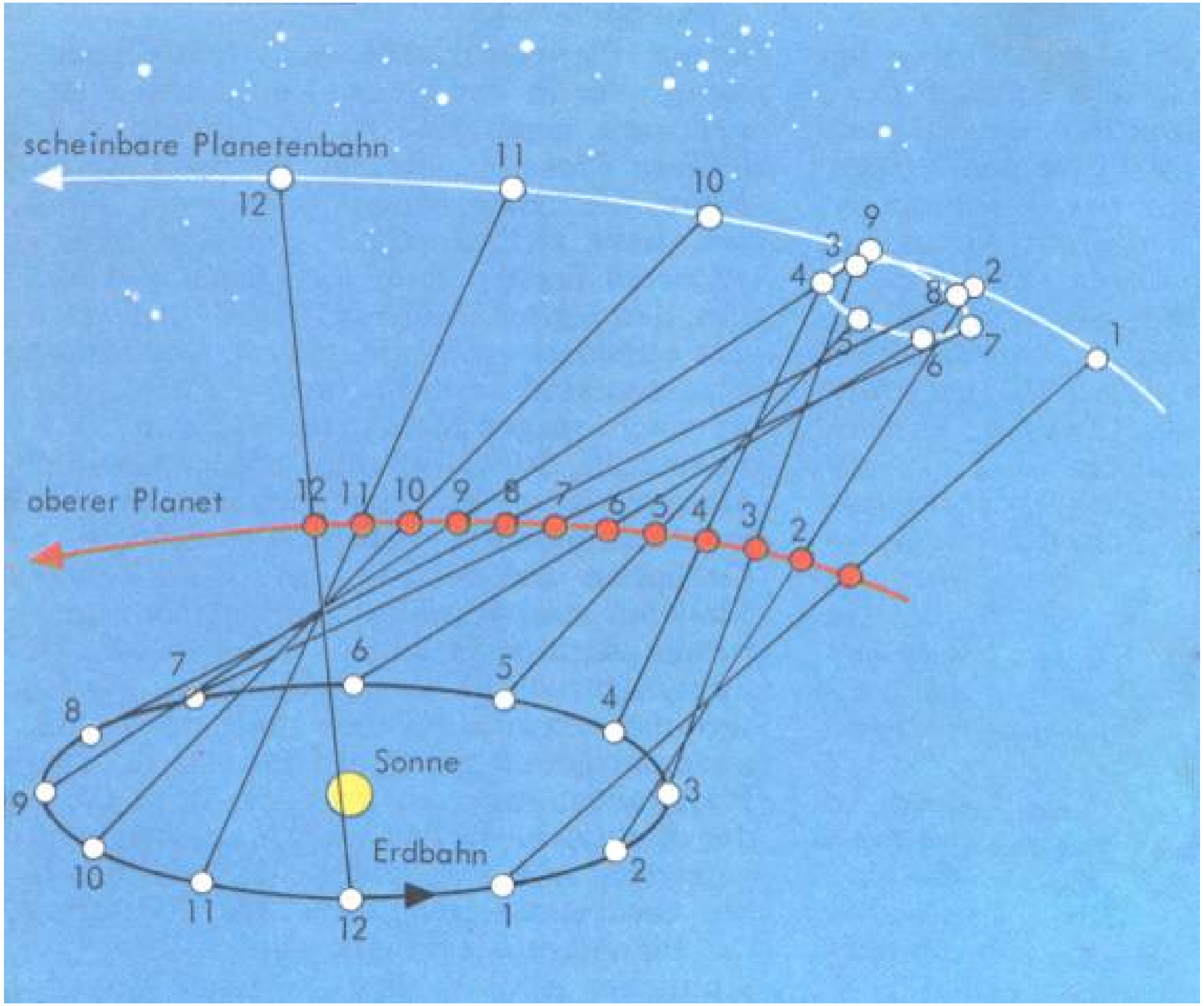
III.2 Proportionen: Umlaufzeiten der Planeten



Oppositionsschleife des Mars



Epizykel (dtv-Atlas Astronomie, 1987, 14)



Rückläufige Bewegung eines oberen Planeten
(dtv-Atlas Astronomie, 1987, 56)

III.2 Proportionen:
Umlaufzeiten der Planeten

Obere Planeten

$1/T_{sid} = 1 - 1/T_{syn}$

Jupiter: (71/65) a synod. Periode

Erde

(71/65) a ~ 71/65 · 360° ≈ 393°

Jupiter: langsam

eine Umdrehung weniger

(71/65) a ~ (71-65)/65 · 360°

(71/65) a ~ 6/65 · 360° ≈ 33°

71 a ~ 6 · 360°

(71/6) a ~ 360°

Umlaufzeit ca. 11,85 a

Kopernikanische Formeln

Untere Planeten

$1/T_{sid} = 1 + 1/T_{syn}$

Venus: (8/5) a synodische Periode

Erde

(8/5) a ~ 8/5 · 360° ≈ 576°

Venus: schnell

eine Umdrehung mehr als die Erde

(8/5) a ~ (8+5)/5 · 360°

(8/5) a ~ 13/5 · 360° ≈ 936°

8 a ~ 13 · 360°

(8/13) a ~ 360°

Umlaufzeit ca. 0,615 a

III.2 Proportionen: Umlaufzeiten der Planeten

Position	Planet	Durchschnittl. synodische Periode	Anzahl synod. Per. bis zur Wied. Anzahl Epizykeldrehungen	Dauer bis zur Wiederkehr	Umlaufzeit	Anzahl Umläufe bis zur Wiederkehr der gleichen Konstellation zur gleichen Zeit	Anzahl Deferentenumläufe bis zur Wied.: Tierkreisdurchläufe
untere	Merkur	46/145 a	145	46 a	46/191 a	46/(46/191) = 191	46
	Venus	8/5 a	5	8 a	8/13 a	8/(8/13) = 13	8
obere	Mars	79/37 a	37	79 a	79/42 a	79/(79/42) = 42	42
	Jupiter	71/65 a	65	71 a	71/6 a	71/(71/6) = 6	6
	Saturn	59/57 a	57	59 a	59/2 a	59/(59/2) = 2	2

Obere Planeten: Opposition in der Mitte der Rückläufigkeitsphase
Anzahl Deferentenumläufe (Tierkreisdurchläufe) = Anzahl Umläufe
Anzahl Oppositionen = Anzahl Rückläufigkeiten = Anz. Epizykeldrehungen (>360°)

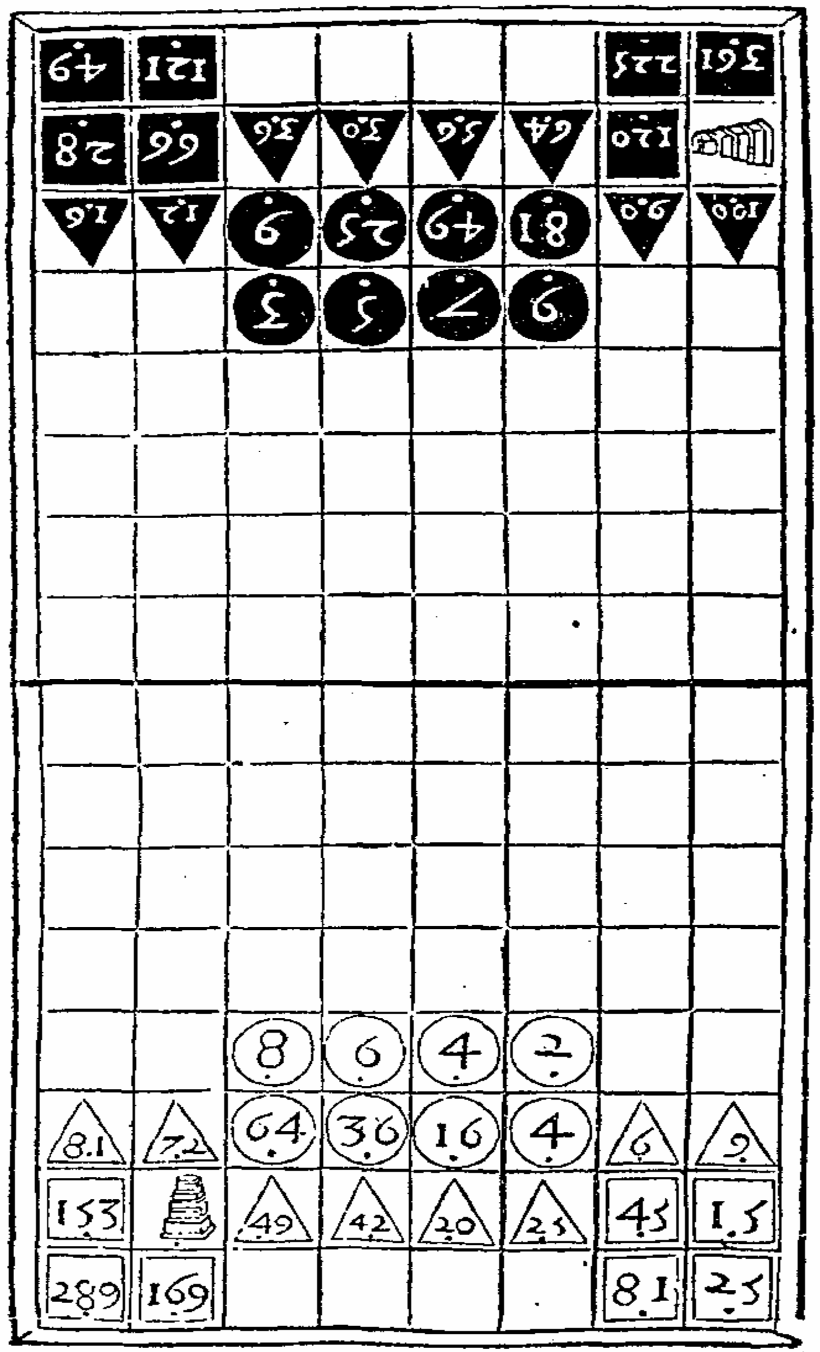
Untere Planeten: untere Konjunktion in der Mitte der Rückläufigkeitsphase
Anzahl Deferentenumläufe (Tierkreisdurchläufe) = Anz. Sonnenumläufe (heliozentr.)
Anzahl untere Konjunktionen = Anzahl Rückläufigkeiten = Anz. Epizykeldrehungen

IV.1 Zahlenkampfspiel

Spielfeld

1030 Würzburg
1090 Regensburg
14. Jh. engl. Bearbeitungen
14. Jh. frz. Bearbeitungen
~1700 Verschwinden
19. Jh. Wiederentdeckung

Smith, Eaton 1911, 75:
Buxerius / Boissière 1554, 1556



IV.1 Zahlenkampfspiel

Proportionsverkettung

Multiplex	Proportion:	4
	Zahlgenerierung:	$1 \cdot 4 = 4$
		$4 \cdot 4 = 16$
Superparticularis	Proportion:	$(4+1)/4 = 5/4$
	Zahlgenerierung:	$16 \cdot 5/4 = 20$
		$20 \cdot 5/4 = 25$
Superpartiens	Proportion:	$1 + 4/(4+1) = 1 + 4/5 = 9/5$
		$= 2 - 1/5$
	Zahlgenerierung:	$25 \cdot 9/5 = 45$
		$45 \cdot 9/5 = 81$

IV.2 Harmonisches Mittel

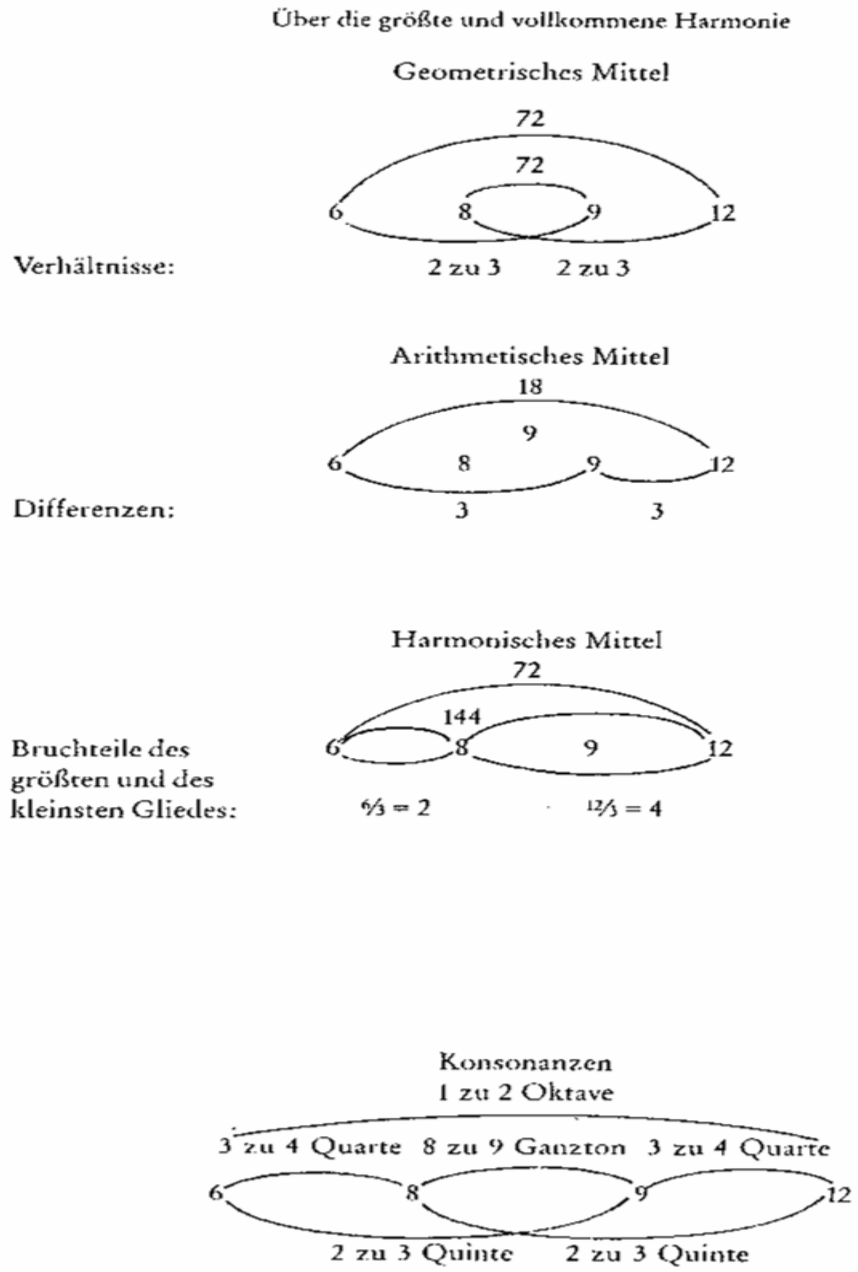
Älteste Siegbedingung

6 8 9 12

Arithmetisches Mittel (a+b)/2

Geometrisches Mittel √(ab)

Geschichte der Musiktheorie Bd. 3, 1990, 216-217
(Boethius, Inst. arithm. II, 172-173)



IV.2 Harmonisches Mittel

Kehrwert
des arithmetischen Mittels
der Kehrwerte zweier Zahlen

1/((1/a +1/b)/2) = 2/(1/a + 1/b)

6 und 12
2/(1/6 + 1/12) = 2/(3/12)
= 2/(1/4) = 8

konstante Differenz
der Kehrwerte
1/12 + x = 1/8
1/8 + x = 1/6
x = 1/24

Anwendung in der Musik:

Saitenlänge der Quint (2/3),
wenn Prim 1 und Oktav 1/2

Saitenlänge der großen Terz (4/5),
wenn Prim 1 und Quint 2/3

Die Frequenzen verhalten sich
wie arithmetische Mittel,
die Saitenlängen wie harmonische.

V. Proportionen in der Architektur

1. Harmonische Teilung

Ganzzahlige Verhältnisse

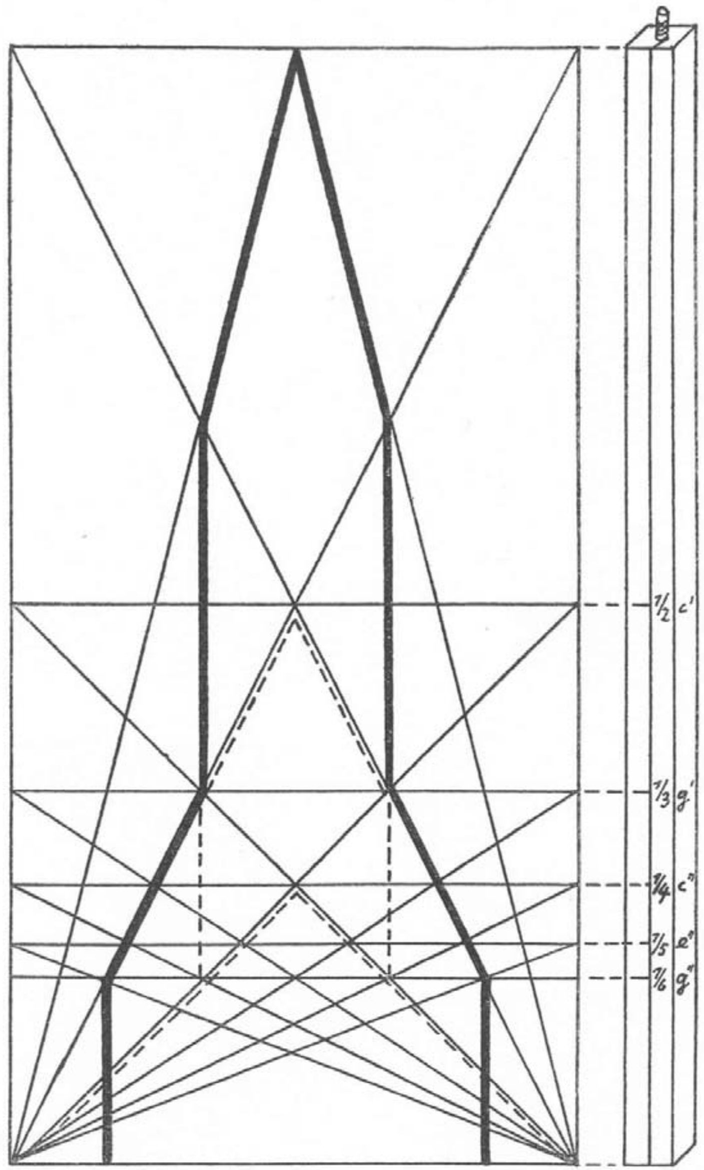
$y = -2x + 1$

$y = (1/a : 1/2)\, x = (2/a)\, x$

Schnittpunkt S:

$x_S = 1/2 - 1/(2(a+1))$

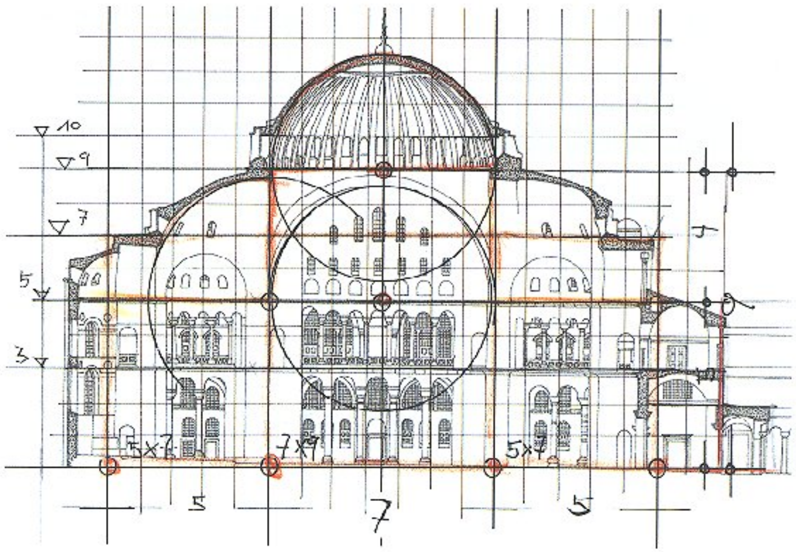
$y_S = 1/(a+1)$



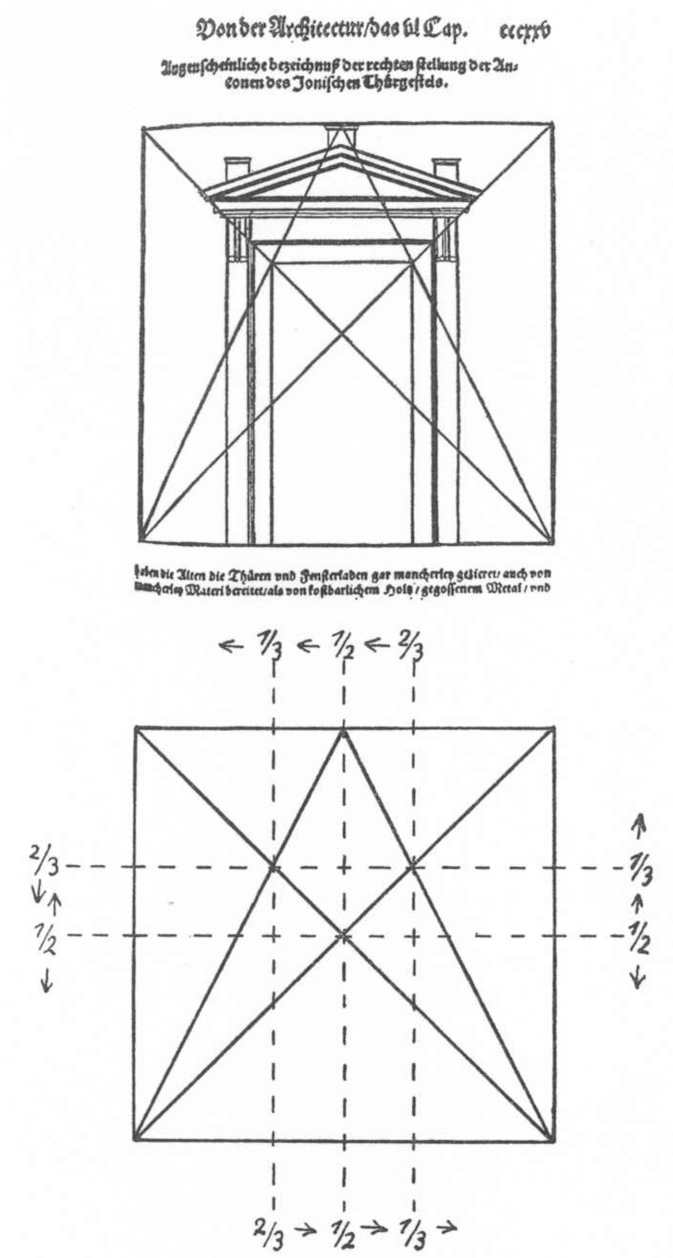
(Villard de Honnecourt (nachweisbar um 1230-1235), Bauhüttenbuch, nach Kayser 1946, Abb. 11)

V. Proportionen in der Architektur

1. Harmonische Teilung



Hagia Sofia



(Vitruv (~25 v. Chr.), De architectura, nach Kayser 1946, Abb. 7, 8)

V. Proportionen in der Architektur

2. Stetige Teilung Goldener Schnitt

Das Ganze (1) : großen Teil (x), = großer Teil : kleiner Teil

$1 : x = x : (1 - x)$

$1\,(1 - x) = x^2$ → geom. Mittel

$x^2 + x - 1 = 0$

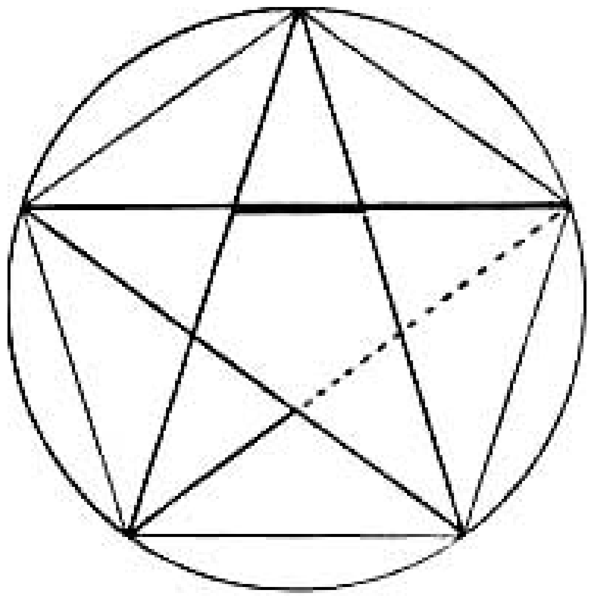
$x = -\frac{1}{2}\,(1 \pm \sqrt{5});\ x_1 = \frac{1}{2}\,(\sqrt{5} - 1)$

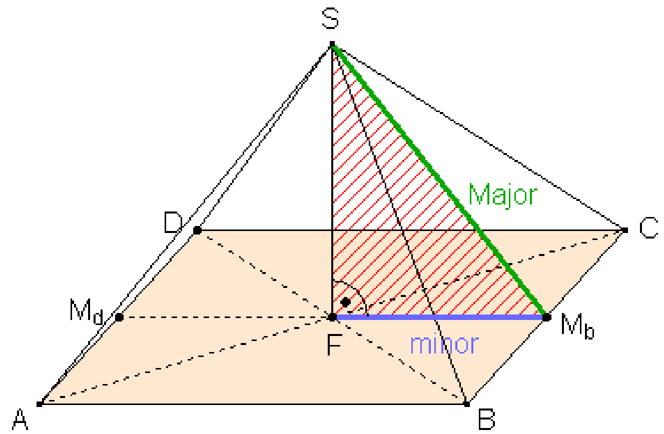
$x_1 \approx 0{,}5\,(2{,}236 - 1) = 0{,}618$

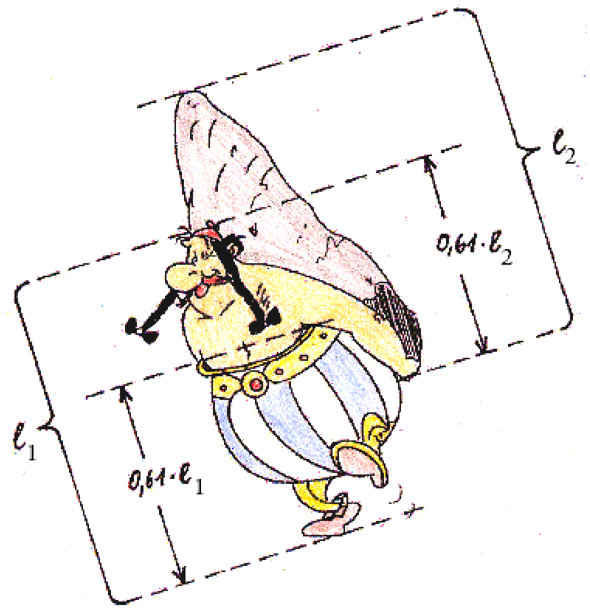
Goldene Zahl: $1 / (\frac{1}{2}\,(\sqrt{5} - 1))$

$= \frac{1}{2}\,(\sqrt{5} + 1)$

$= 1/0{,}618 = 1{,}618$







V. Proportionen in der Architektur

2. Stetige Teilung Goldener Schnitt

großer Teil : kleiner Teil = $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) \approx 1{,}618$
kleiner Teil : großer Teil = $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \approx 0{,}618$

$1{,}618 : 1 = 1 : (1{,}618 - 1)$
$1{,}618 = 1 / 0{,}618$
$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) = 1 / (\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1))$
$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) + 1 = 1 / (\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1))$

Konstruktion (Höhensatz)
rechter Winkel aus m und m
Thaleskreis über Mittelpunkt
dann:
Hypotenuse: $(k+m/2+m/2)+k$
Höhe m
$m^2 = (k+m)k$

$1 / 1{,}618 = 0{,}618 = 1{,}618 - 1$
$1 / 1{,}618^2 = 0{,}382 = 1 - 0{,}618$

Goldenes Dreieck: 36°, 72°, 72° (Zehneck)
z.B. in Fünfeck auf der vorhergehenden Folie
Zehneckseite: $\frac{1}{2} r (\sqrt{5}-1)$

Fibonacci-Folge: 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 …
Verhältnis der Folgenglieder → 1,618…