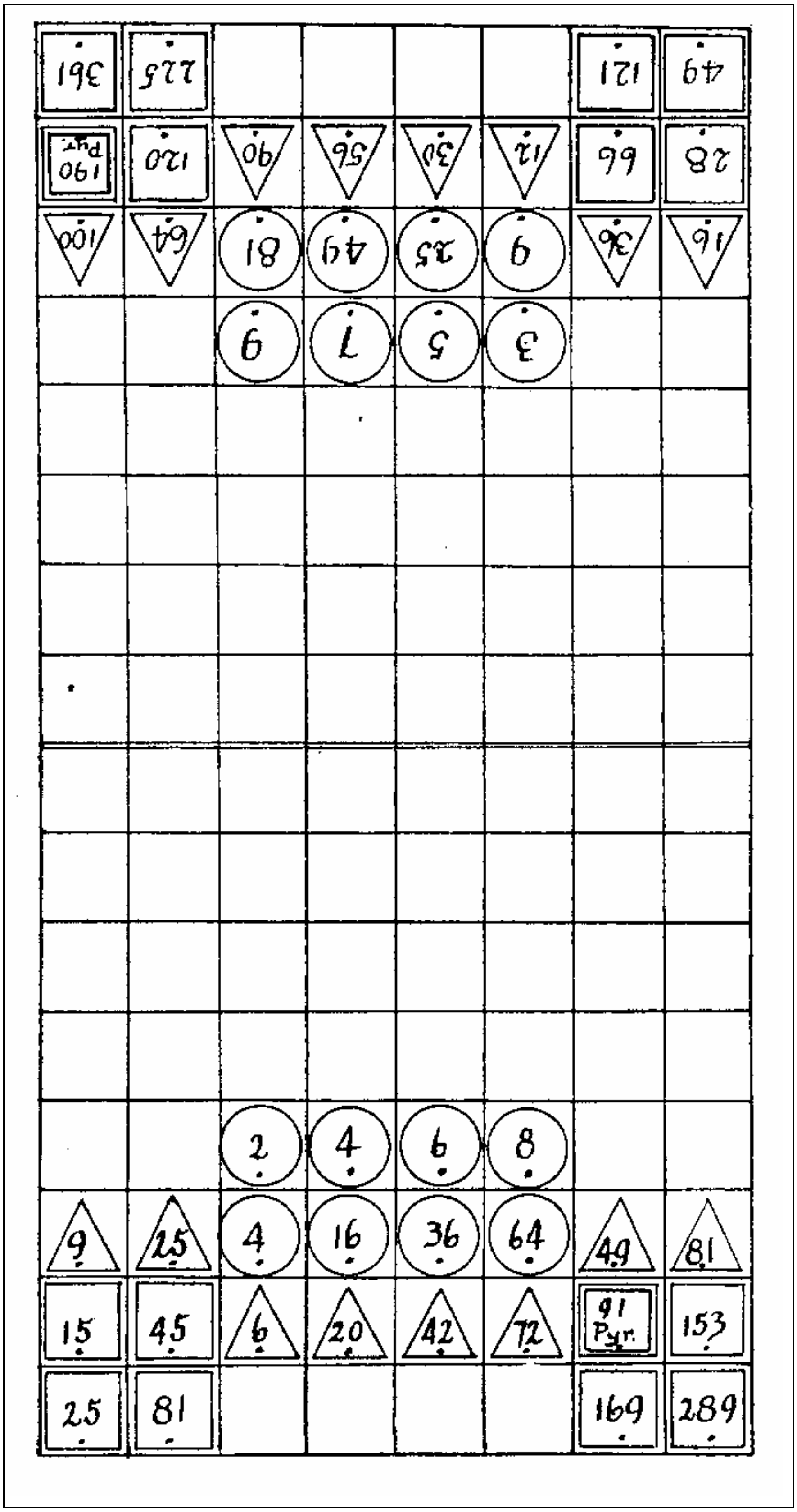
Alfred Holl

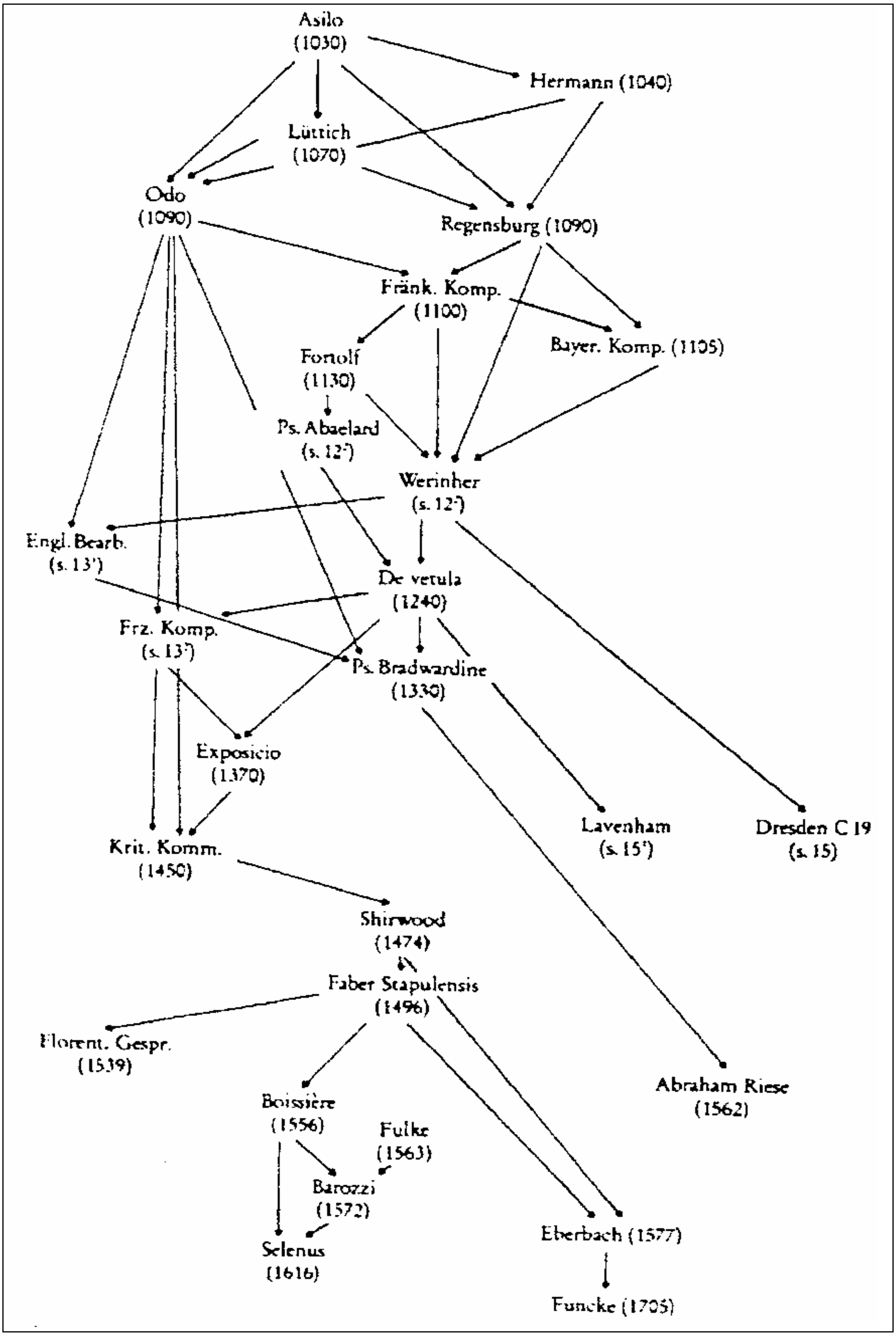
Spiel mit Zahlen - Kampf mit Zahlen? Das mittelalterliche Zahlenkampfspiel Rithmomachie in seiner Regensburger Fassung

1.1 Vorbemerkungen



Smith, Eaton 1911, 77: Faber Stapulensis 1496

1.2 Geschichte der Rithmomachie



Folkerts 1989, 336

1.3 Bezug Regensburgs zur Mathematik im Mittelalter

Otloh von St. Emmeram (~1000-~1070)
Einmaleinstafel mit Apices (westarabische Ziffern)

Wilhelm von Hirsau (1071 Abt von Hirsau)
Sphära, Kalenderrechnung (Computus)

Frater Sigsboto (~1165), Kloster Prüfening
Überarbeitung Al-Chwarizmis [Vogel 1973, 26]

Albertus Magnus (1200-1280)
Primus Euclidis cum commento Alberti

Fridericus Gerhart (~1400-1465), St. Emmeram
Algorismus Ratisbonensis* mit Aufgabensammlung *Practica
findet Niederschlag in vielen Rechenbüchern
(hauptsächlich in Franken und Sachsen)

Matthes Roritzer (?-1495): ab 1480 Dombaumeister
Von der Fialen Gerechtigkeit; Geometria deutsch

Andreas Alexander (~1465-nach 1504), Regensburg, Köln, Leipzig
teilweise deutsche Übersetzung von Al-Chwarizmis *Algebra*
Mathemalogium super novam et veterem loycam Aristotelis
ed. *Perspectiva = rationes visus in radiationibus ac lineis visualibus*
(Johannes Pisanus)

Astronomische Forschungen in den Klöstern Prüfening und Reichenbach

1.4 Die Sammlung des Regensburger Anonymus

Aufbau

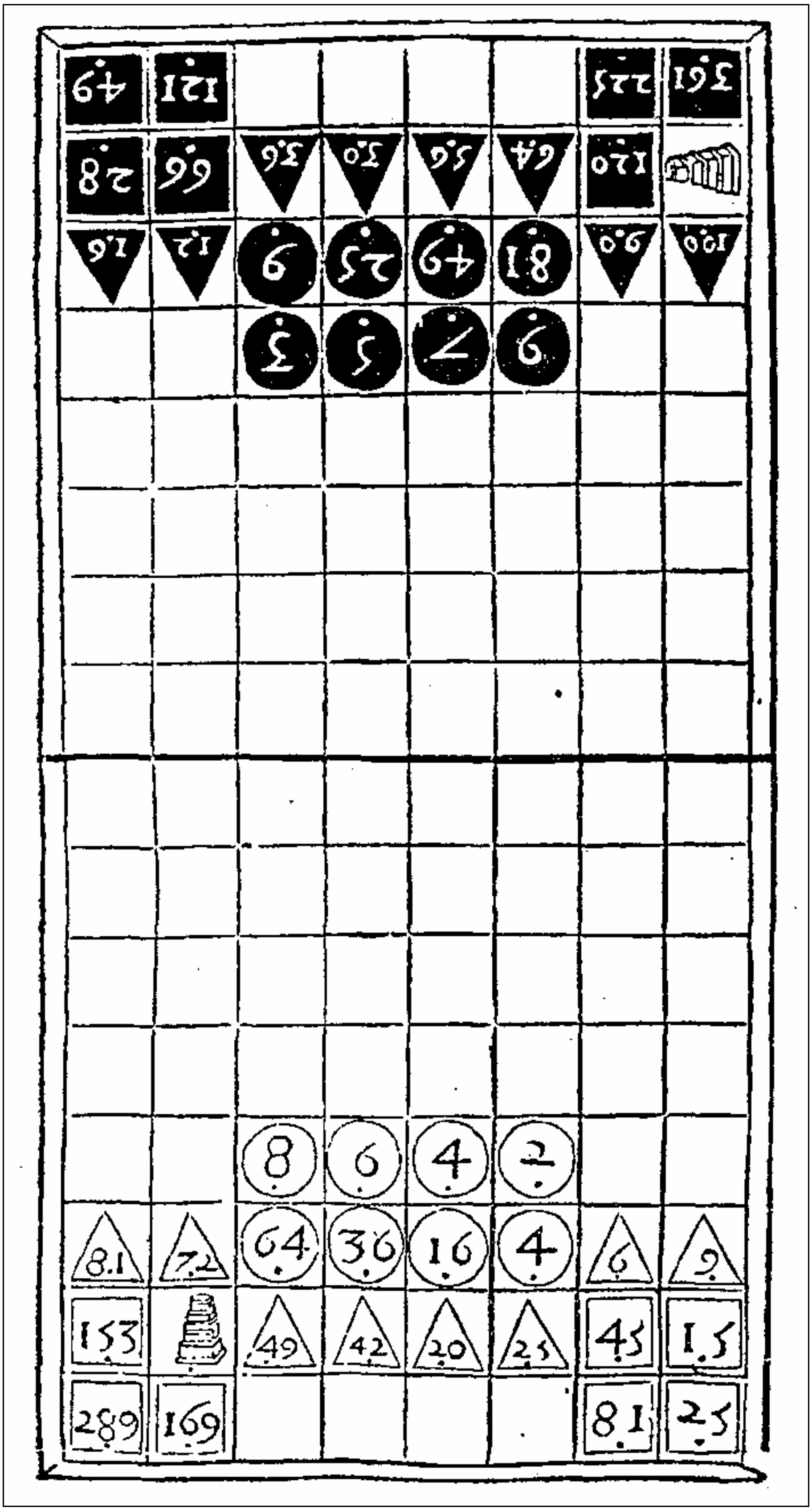
1 Proportionen, Herkunft des Spiels
2 Spielfeld
3-5 Spielsteine:
- **3 multiplices**
- **4 superparticulares**
- **5 superpartientes**

6 Spielzüge
7-9 Schlagen:
- **7 congressus, insidiae, eruptio;**
- **8 Pyramide;**
- **9 Ausnahme: obsidio**
- **[spätere Terminologie nach Folkerts 1989, 332]**

10-14 Siegbedingungen
15 Ergänzung zu 1
16-20 Beispiele: Ungerade Seite schlägt gerade Seite: eruptio
21-23 Beispiele: Gerade Seite schlägt ungerade Seite: eruptio

Anhang: Spielfeld, arithmetische Folgen,
griechische Alphabetzahlen und Zahlnamen

2. Die Rithmomachie (Regensburger Anonymus)



Smith, Eaton 1911, 75: Buxerius / Boissière 1554, 1556

2.1.1 Proportionstypen (Boethius, Nikomachos)

multiplex – πολλαπλάσιος [Nikom. arith. 1,18], ¹ πολλαπλασιότης
ein ganzzahliges Vielfaches: n
Beispiel: quadruplus – τετραπλοàς
Zahlgenerierung: 1 · 4 = 4;   4 · 4 = 16

superparticularis – ™ριμόριος [Nikom. arith. 1,19], ¹ ™ριμοριότης
ein Ganzes und ein Teil: (n+1)/n = 1 + 1/n
3/2, 4/3, 5/4, 6/5, 7/6, 8/7, 9/8
Nenner bestimmt den Terminus

Beispiel: sesquiquartus, superquartus – ™ριτέταρτος
Proportion: (4+1)/4 = 5/4
Zahlgenerierung: 16 · 5/4 = 20;   20 · 5/4 = 25

Zinsrechnung, Musik (Frequenzverhältnis große Terz : Tonika)

superpartiens – ™ριμερής [Nikom. arith. 1,20], ¹ ™ριμερότης
ein Ganzes und (alle - ein) Teil:
(2n+1)/(n+1) = 1 + n/(n+1) = 2 - 1/(n+1)
5/3, 7/4, 9/5, 11/6, 13/7, 15/8, 17/9
Zähler bestimmt den Terminus

Beispiel: superquadripartiens, superquadriquintus –
™ριτετραμερής, ™ριτετράπεμπτος
Proportion: 1 + 4/(4+1) = 1 + 4/5 = 9/5 = 2 - 1/5
Zahlgenerierung: 25 · 9/5 = 45;   45 · 9/5 = 81

in der Literatur oft missverständlich: (n+m)n, $1<m<n$
[Folkerts 1989, 332]

2.1.1 Proportionstypen (Sonderfälle)

Sonderfälle bei Nikomachos [arithm. 1,23],
die Boethius nicht nennt:

™ριτρί-πεμπτος 1 3/5
™ριτετρα-έβδομος 1 4/7
™ριπεντ-έννατος 1 5/9

--

multiplex superparticularis – πολλαπλασι-επιμόριος
[Nikom. arithm. 1,22]

mehrere Ganze und ein Teil
Beispiel: triplex sesquiquartus 1 + 1 + 1 + 1/4

multiplex superpartiens – πολλαπλασι-επιμερής
[Nikom. arithm. 1,23]

mehrere Ganze und (alle - ein) Teil
Beispiel: triplex superquadripartiens 1 + 1 + 1 + 4/5

2.1.2 Verkettung von Proportionen

Für die Konstruktion der Spielsteinwerte der Rithmomachie werden Verkettungen von Proportionen gebildet.

Ausgangspunkt: 1 (stets)

Beispiel: quadruplex, sesquiquartus, superquadripartiens

1. multiplex:	**quadruplus**	**1 · 4 = 4**
2. multiplex:	**quadruplus**	**4 · 4 = 16**
1. superparticularis:	**sesquiquartus**	**16 · 5/4 = 20**
2. superparticularis:	**sesquiquartus**	**20 · 5/4 = 25**
1. superpartiens:	**superquadripartiens**	**25 · 9/5 = 45**
2. superpartiens:	**superquadripartiens**	**45 · 9/5 = 81**

Man gehe zwei nach rechts und zwei nach unten und schon hat man zwei Drittel obiger Rithmomachie-Verkettung.

1	4	16	64	256	1024
	5	20	80	320	1280
		25	100	400	1600
			125	500	2000
				625	2500
					3125

[Boeth. arith. 2,2]

2.1.3 Quadratische Pyramiden

[RA 8, Boeth. arithm. 2,23-24]
91 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36, Basis 36, pyramis perfecta
190 = 16 + 25 + 36 + 49 + 64, Basis 64, pyramis ter curta

2.2 Spielzüge

Es wird abwechselnd (*alternatim*) gezogen:

- **vorwärts (*in ante*)**
- **rückwärts (*retro*)**
- **nach rechts (*dextrorsum*)**
- **nach links (*sinistrorsum*)**
- **im Winkel (*angulariter*)**
  Felder werden nicht diagonal, sondern rechtwinklig gezählt

multiplex:	**ins zweite Feld (*in campum secundum*)**
superparticularis:	**ins dritte Feld (*in campum tertium*)**
superpartiens:	**ins vierte Feld (*in campum quartum*)**

2.3 Schlagen

1. congressus (RA 7)
Treffen eines Steines mit gleichem Wert
bei rechtmäßigem Spielzug

2. insidiae (RA 7)
additiv oder multiplikativ in die Zange nehmen
„Durch die Verbindung *per adiunctos* der 3 und der 5 fällt die 8“ (RA 16).

3. eruptio (RA 7)

3.1 Spielsteinwert mal Entfernung
„Durch die 3 der gegnerischen Seite fällt die 6 im zweiten Feld *in secundo campo*“ (RA 16).

3.2 Spielsteinwert mal Entfernung plus zweiter Spielsteinwert
„Durch die 16 wird die 289 im 13ten Feld geschlagen, wenn ihr die 81 beim nächsten Zug *in proximo suo tractu* hinzugefügt wird“ (RA 17).

4. obsidio (RA 9)
Bewegungsunfähigkeit durch Einkreisung

5. Pyramide (RA 8)
angreifbare Zahlenwerte
- Gesamtwert
- Wert der Basis (unterstes Quadrat: 36 für 91 bzw. 64 für 190)
Mit dem Fall einer Pyramide fallen auch alle Spielsteine
mit Quadratzahlen dieser Pyramide.

<u>2.4 Siegbedingungen und Mittelwerte *medietates*</u>

Folgen aus drei Zahlen mit bestimmten Mittelwert-Eigenschaften, auch mittels geschlagener gegnerischer Steine
Geometrisches Mittel nicht beim RA, erst bei Fortolf 1130

<u>Arithmetisches Mittel</u>: additive Mitte zwischen zwei Zahlen
Beispiel: a(10,40) = 25
konstante Differenz 15:   10 + 15 = 25; 25 + 15 = 40

Anwendungen: z.B. Notendurchschnitt, Statistik

Anwendung in der Musik:
Frequenz der Quint (3/2), wenn Tonika 1 und Oktav 2
Frequenz der großen Terz (5/4), wenn Tonika 1 und Quint = 3/2

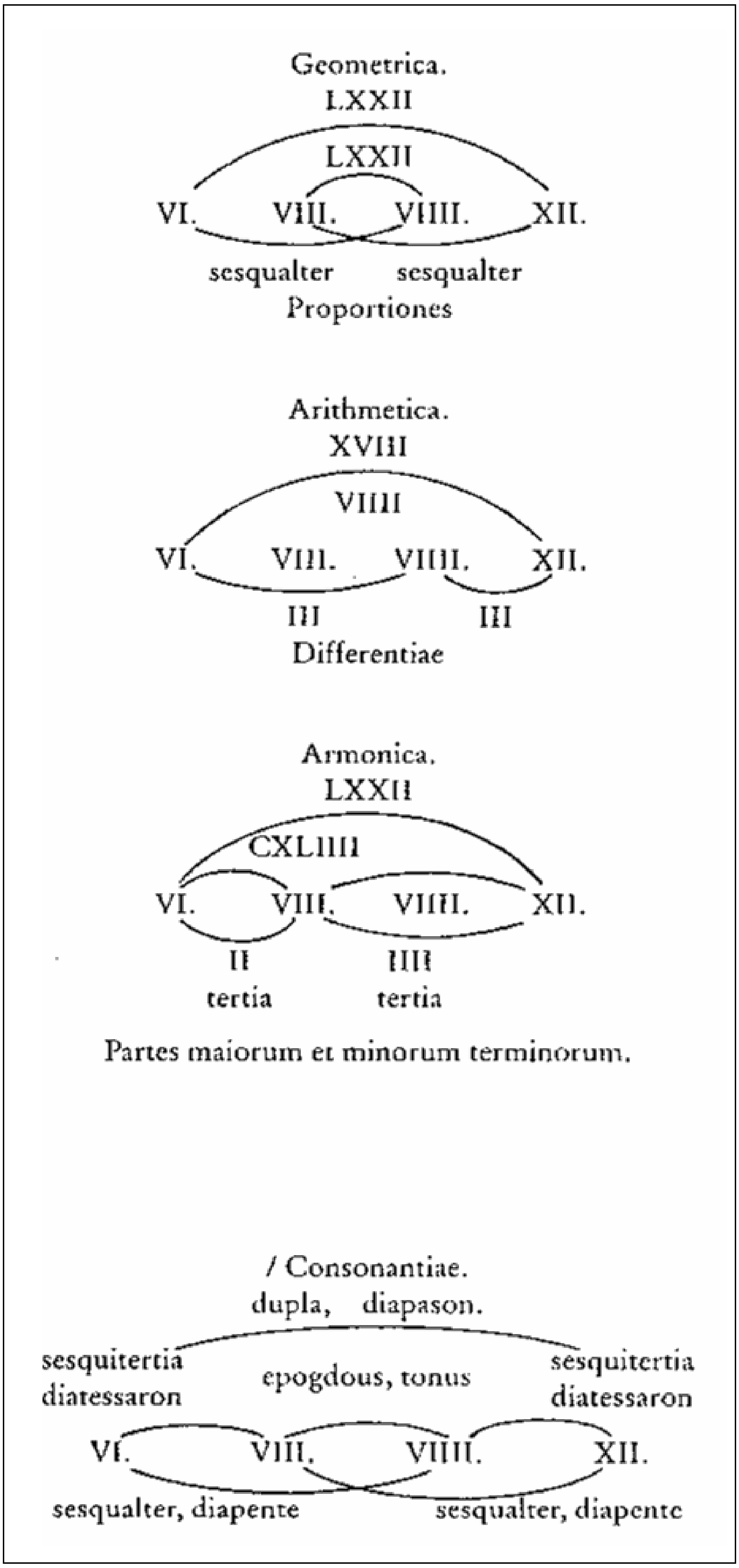
<u>Harmonisches Mittel</u>:
Kehrwert des arithmetischen Mittels der Kehrwerte zweier Zahlen
Beispiel: h(10,40) = 16
konstante Differenz der Kehrwerte 3/80:
1/40 + 3/80 = 1/16; 1/16 + 3/80 = 1/10

Anwendung in der Musik:
Saitenlänge der Quint (2/3), wenn Tonika 1 und Oktav 1/2
Saitenlänge der großen Terz (4/5), wenn Tonika 1 und Quint 2/3
Die Frequenzen verhalten sich wie arithmetische Mittel, die Saitenlängen wie harmonische.

<u>Geometrisches Mittel</u>: multiplikative Mitte zwischen zwei Zahlen
Beispiel: g(10,40) = 20
konstanter Quotient 2:   10 · 2 = 20; 20 · 2 = 40

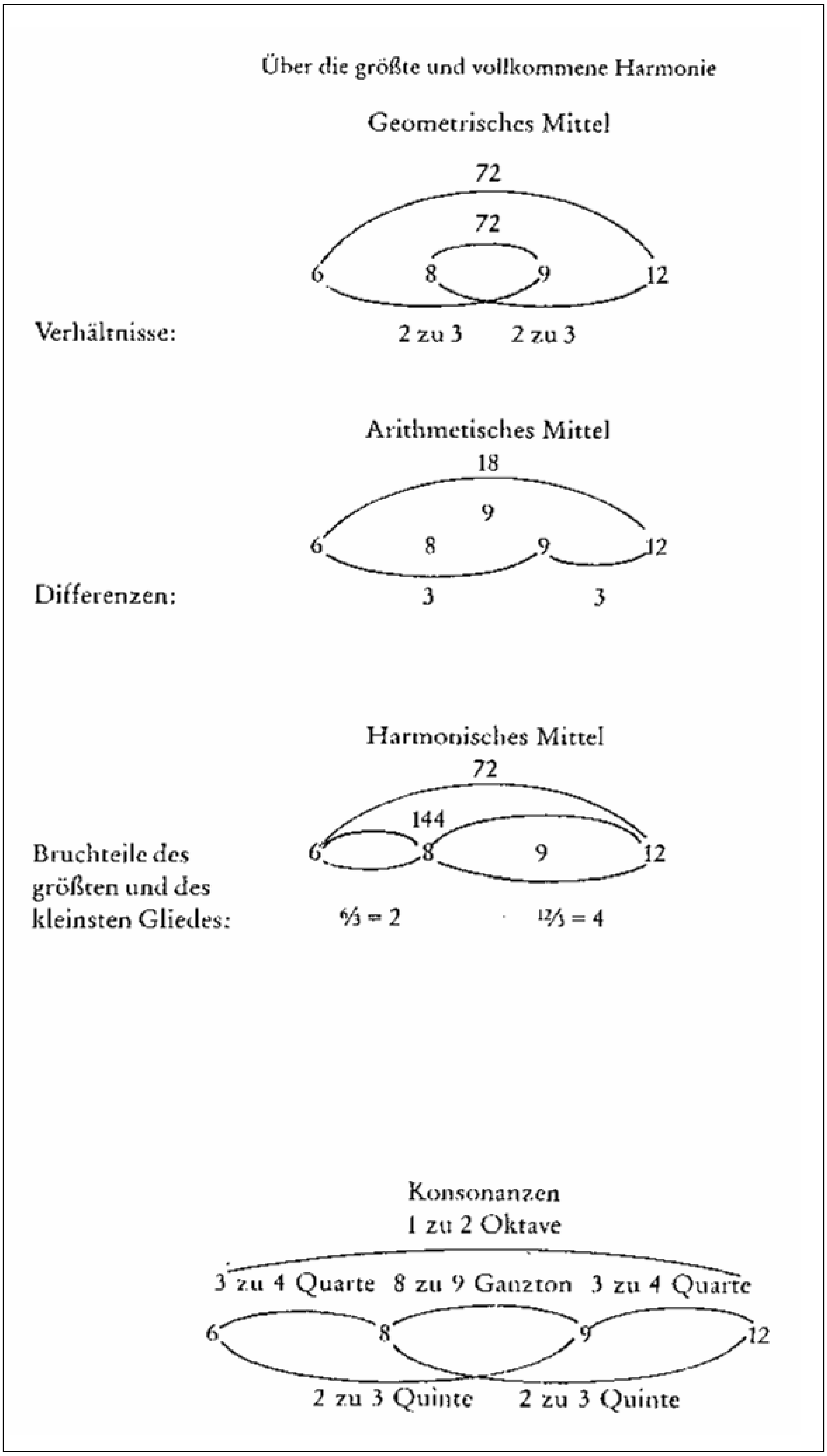
Anwendung in der Geometrie:
zu Rechteck flächengleiches Quadrat, Höhensatz

<u>**2.4 Siegbedingungen und Mittelwerte *medietates***</u>



Geschichte der Musiktheorie Bd. 3, 1990, 216-217
(Boethius, Inst. arithm. II, 172-173)

2.4 Siegbedingungen und Mittelwerte *medietates*



Geschichte der Musiktheorie Bd. 3, 1990, 216-217
(Boethius, Inst. arithm. II, 172-173)

3.1 Bedarf an Rechenmethoden

Brett- und Ziffernrechner

Zur Linken der Arithmetica sitzt Pythagoras vor einem Linienbrett, auf dem die Zahlen 1241 und 82 gelegt sind; zur Rechten Boethius vor Zahlen in indischen Ziffern. Das Mittelalter hielt, beidemal irrtümlich, diese Männer für die Erfinder der einen und der anderen Rechenweise. (Auf dem Gewand der Arithmetica die geometrischen Reihen 1 2 4 8 und 1 3 9 27.)
Aus der Margarita Philosophica des Karthäuserpriors Gregor Reisch von 1503 (B 149).

Menninger II 162

3.2 Zahldarstellung

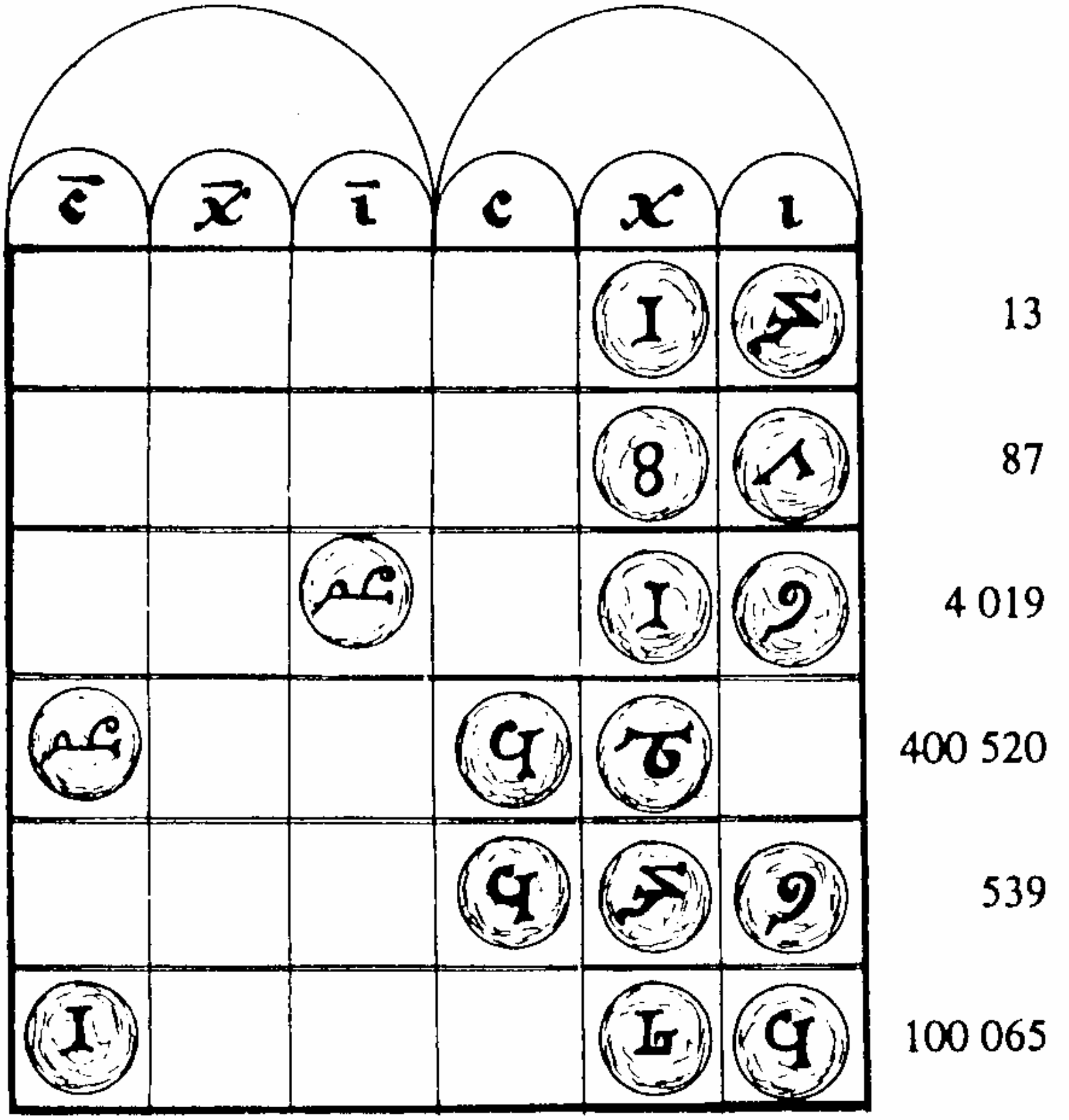
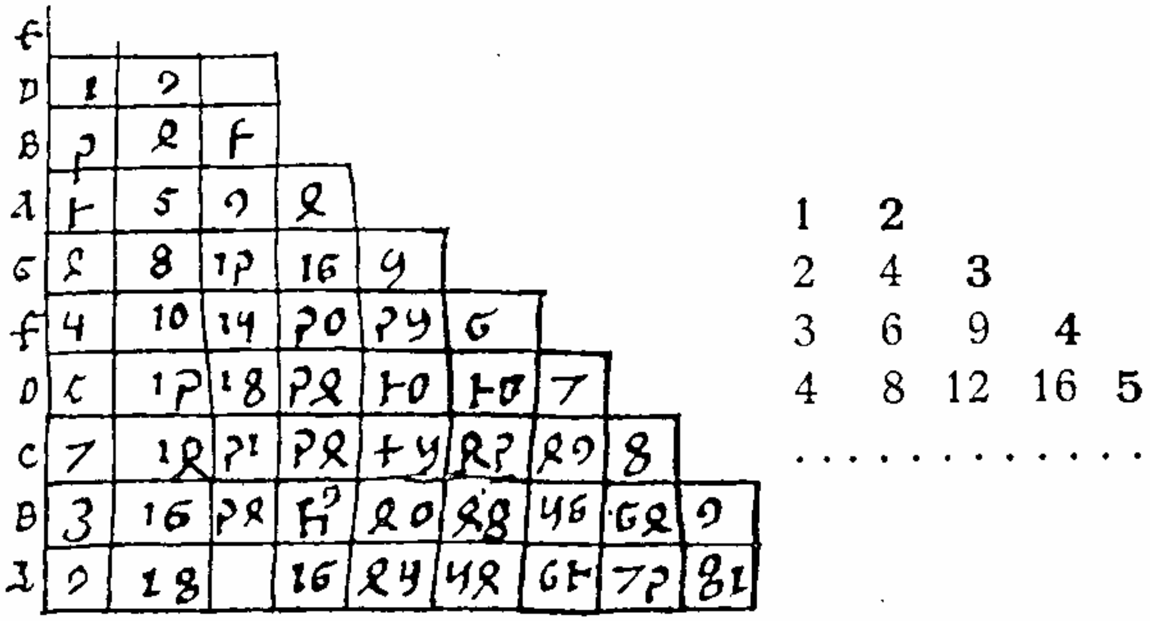


Abb. 352: Das Prinzip der Wiedergabe ganzer Zahlen durch apices auf dem verbesserten Abakus des Gerbert und seiner Schüler; dieser Abakus bestand aus 27 Spalten, die zu Dreiergruppen zusammengefaßt waren. Der Zahlenwert der apices war positionsabhängig je nach Spalte, in der sie standen; das Fehlen von Einheiten einer Ordnung wurde durch Freilassen der entsprechenden Spalte angezeigt.

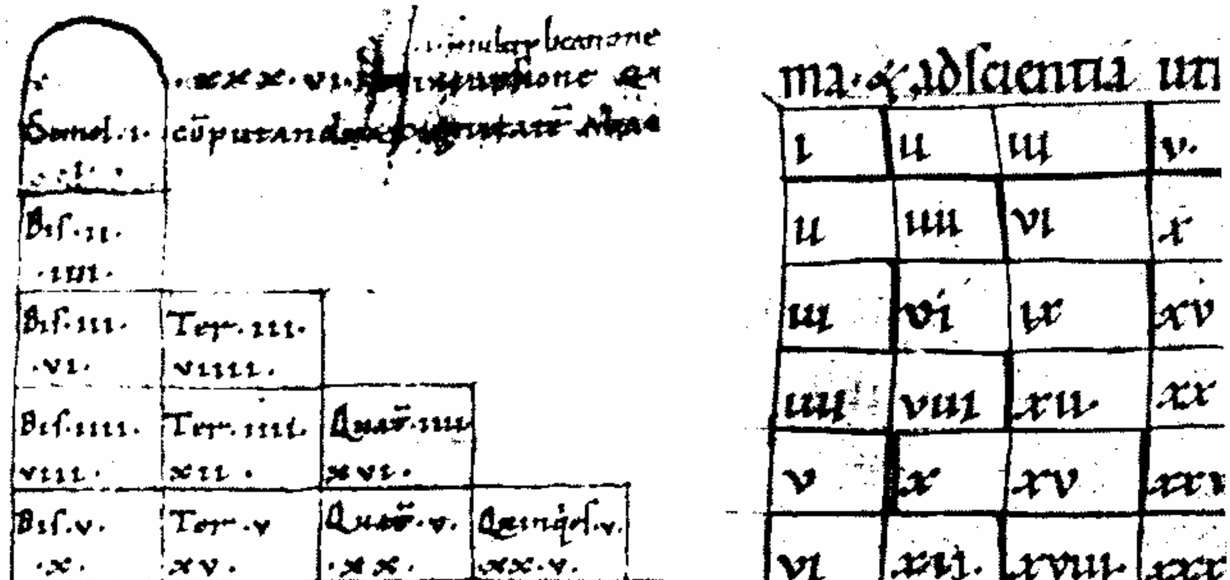
Ifrah 1991, 532

3.3 Multiplikationsmethoden, Einmaleins



Eine Einmaleins-Tafel von 1 × 1 bis 9 × 9

aus einer der ältesten deutschen Algorismus-Handschriften, 12. Jahrhundert (Q 116).



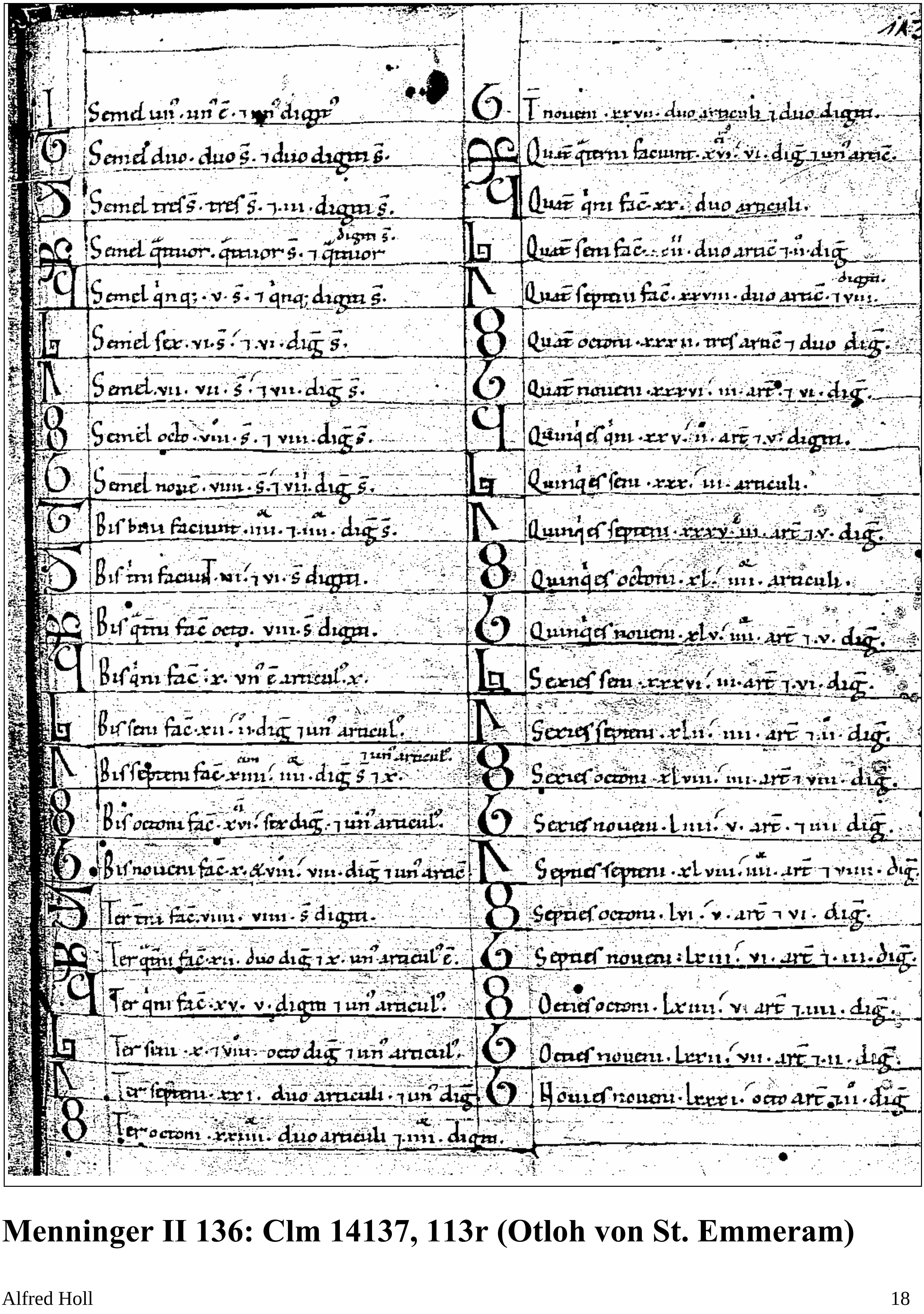
Zwei Einmaleins-Tafeln (Anfang)

aus Klosterhandschriften des 13. Jahrhunderts.

Semel 1-, *bis* 2-, *ter* 3-mal usw. Beide noch ganz 'römisch'. Über der zweiten: „. . . et ad scientiam util(issima) . . ." — „und zur Wissenschaft äußerst nützlich . . ." Reizvoll ist der Vergleich mit Einmaleinstafeln anderer Zeiten und Völker (vgl. Sachweiser). Staatsbibliothek, München.

Menninger II 239 (1143 Cod. Vind. 275, 27r [Nagl 1889]) und 863

3.3 Multiplikationsmethoden, Einmaleins



Menninger II 136: Clm 14137, 113r (Otloh von St. Emmeram)

3.3 Multiplikationsmethoden, Einmaleins

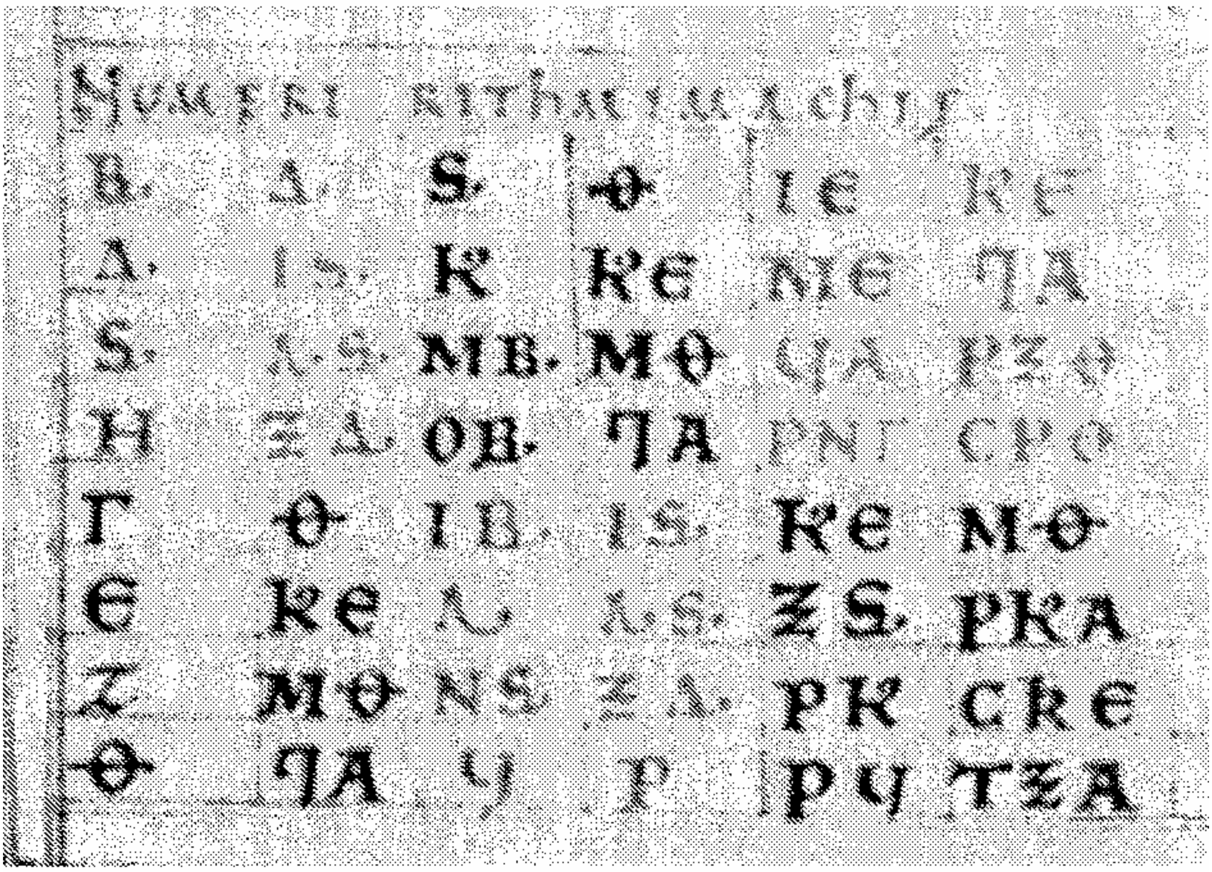
Multiplicirn.

Heysset vil machen/vnnd leret wie mann ein zal mit jr/oder einer andern vilfeltigen sol/vnd du must für allen dingen/das ein mal eins wol wissen/vnd außwendig lernen wie hie.

1	1	1	2	9	18	5	6	30
1	2	2				5	7	35
1	3	3	3	3	9	5	8	40
1	4	4	3	4	12	5	9	45
1	5	5	3	5	15			
1	6	6	3	6	18	6	6	36
1	7	7	3	7	21	6	7	42
1	8	8	3	8	24	6	8	48
1	9	9	3	9	27	6	9	54
mal		ist	mal		ist	mal		ist
2	2	4	4	4	16	7	7	49
2	3	6	4	5	20	7	8	56
2	4	8	4	6	24	7	9	61
2	5	10	4	7	28			
2	6	12	4	8	32	8	8	64
2	7	14	4	9	39	8	9	72
2	8	16	5	5	20	9	9	81

Adam Ries 1525, 11-12

3.4 Rhythmomachie oder Arithmomachie



The third table is headed: *numeri rithmimachie*, 'number-battle'. Bubnov lists manuscripts in which the rules of the game occur (Bubnov 1899:xcvi–xcviii). This appears to be a unique example of a table employing Greek numerals, and giving simply the 'pieces' used in the game with no rules. Reading down (see also below), in the left-hand column, we have the even numbers, 2,4,6,8, which play the odd, 3,5,7,9, their multiples, 4,16,36,64, which play the multiples 9,25,49,81; the middle two rows contain the superparticulars: 9 contains 6 plus half of 6, 25 contains 20 plus a quarter of 20, and so on. The last two rows contain the superpartients: 25 has 15 plus two-thirds of 15, 81 has 45 plus four-fifths of 45, and so on. Each side in the game has four pairs of superparticulars and four pairs of superpartients.

2	4	6	9	15	25
4	16	20	25	45	81
6	36	42	49	91	169
8	64	72	81	153	289

plays:

3	9	12	16	28	49
5	25	30	36	66	121
7	49	56	64	120	225
9	81	90	100	190	361

Evans 1977, 26-27: Oxford, St. John's College MS 17, 56v

3.5 Schlussbemerkung

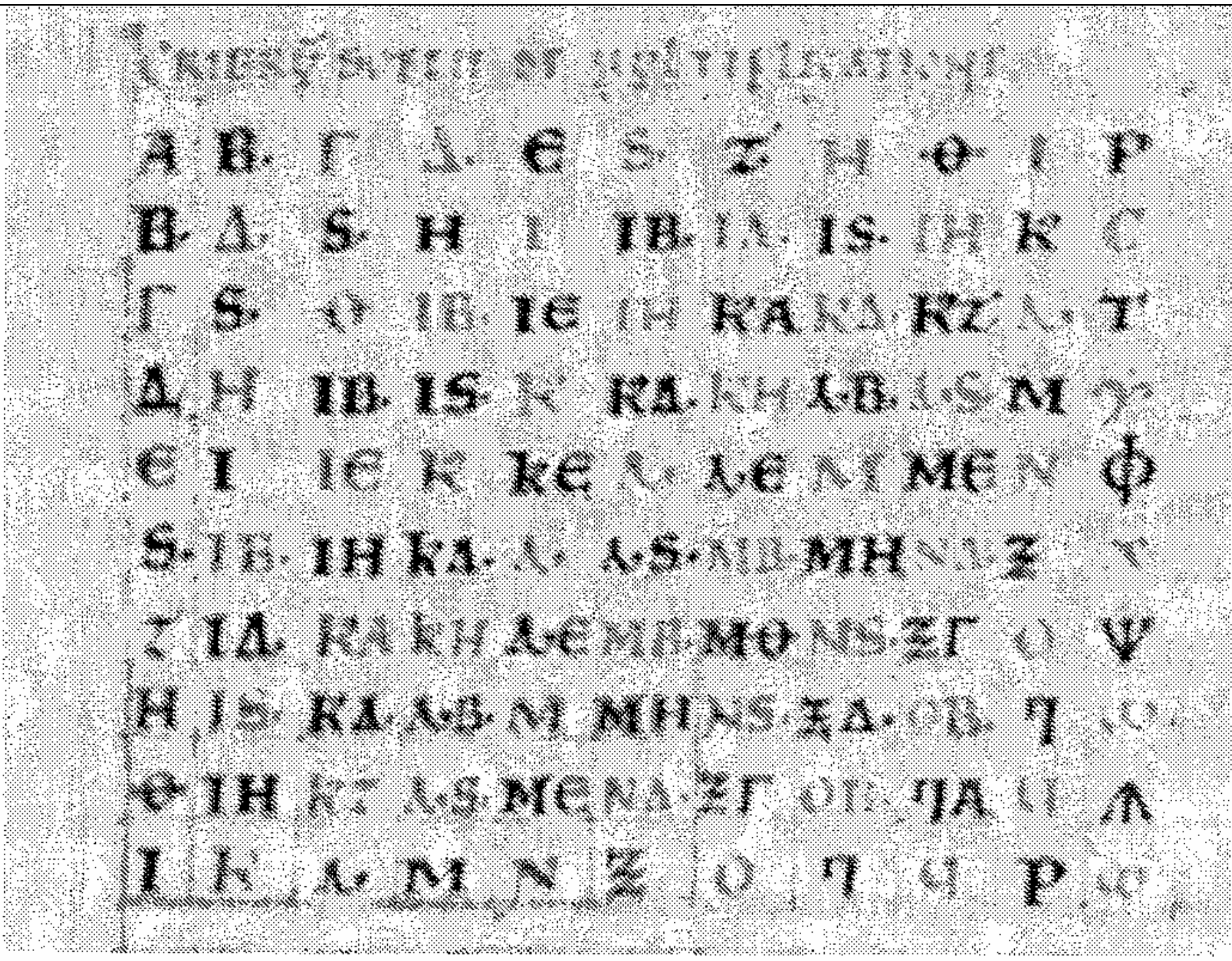


Figure 2 (opposite page). Three tables, in Greek numerals. Oxford, St John's College, MS 17, f. 56v. The first table, at the top of the page, is headed: *Cribrum Boetii de Multiplicatione*, "A Boethian 'crib' for multiplication" (see also the drawing directly below). This is a multiplication table up to 100, with the 100s up to 1000 in the extreme right-hand column. It employs a notation system in which the letters of the Greek alphabet stand for numbers up to ten, and then for 20, 30, 40, to 100, and then for the hundreds up to 1000, in alphabetical order. An important feature of this method is that it, like the Arabic system, allows notation of numbers above 9 without the use of columns.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	200
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	300
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	400
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	500
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	600
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	700
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	800
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	900
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	1000

Evans 1977, 26-27: Oxford, St. John's College MS 17, 56v