Alfred Holl

Textaufgaben in deutschsprachigen Rechenbüchern des 15. Jh.

Die Rechenkunst in West- und Mitteleuropa begann um die Mitte des 15. Jahrhunderts, Klöster und Universitäten ebenso wie die lateinische Sprache hinter sich zu lassen. Sie wandelte sich zur Domäne der Kaufleute, für die volkssprachliche Rechenbücher verfasst wurden.

In der Arithmetica practica hatten sich damals die arabischen Zahlen noch längst nicht flächendeckend durchgesetzt. Wer sie schreiben konnte, rechnete „mit der Feder“; eine Anleitung zum Rechnen mit arabischen Zahlen hieß Algorismus nach dem persischen Mathematiker al-Khwarizmi (~780-~850). Die ältere Konkurrenzmethode der Rechnung „auf den Linien“ (Rechenpfennige auf einem Rechenbrett oder Abakus) hielt sich jedoch bis weit ins 16. Jh. hinein (vgl. Abb. Algorist und Abacist aus Gregor Reischs *Margarita Philosophica* 1503).

So musste noch Adam Ries (1492-1559) in seinem Bergbaukontor in Annaberg/Erzgebirge auf den Linien rechnen, privat verwendete er arabische Zahlen. Sein Rechenbuch (1522 und später) behandelte beide Methoden, die meisten anderen spezialisierten sich nur auf eine. Die illustrierenden Beispiele gleichen sich oft.

Die rein kaufmännischen Aufgaben geben wichtige kulturhistorische Aufschlüsse über gehandelte Waren und ihre Preise, über Edelmetalle und Währungen, über Gewichte und Längenmaße. Mathematisch gesehen sind sie aber nicht sehr spannend und ziemlich stereotyp. Derartige sollen hier nicht betrachtet werden, ebenso wenig kahle Aufgaben vom Typ „Ich tue dies und das mit einer Zahl, so dass jenes herauskommt; wie lautet die Zahl?“, wie wir sie auch aus heutigen Textaufgaben kennen. Das Augenmerk soll vielmehr auf Problemstellungen in typisch mittelalterlichem oder besonders originellem Gewand gerichtet werden.

Die folgende Auswahl ist meist deutschsprachigen Rechenanleitungen entnommen, die eindeutig vor 1500 datierbar sind. Es gibt davon ziemlich wenige: drei Bücher und vielleicht zwei Dutzend Handschriften, von denen fünf ediert sind (vgl. Quellenverzeichnis). U.a. wartet die Aufgabensammlung Vind. 3029 der Österreichischen Nationalbibliothek meines Wissens noch auf eine Edition. Erst mit Beginn des 16. Jh. beginnen gedruckte Rechenbücher regelrecht aus dem Boden zu schießen (Apian 1527, Ries 1518/1574 etc.).

Dem historischen Ursprung der Aufgaben und ihrer Verbreitung in mehreren Werken sowie wechselnden Gewändern wird nicht detailliert nachgegangen. In den Transkriptionen sind Schreibung und Satzbau etwas geglättet, süddeutsche Eigenheiten belassen.

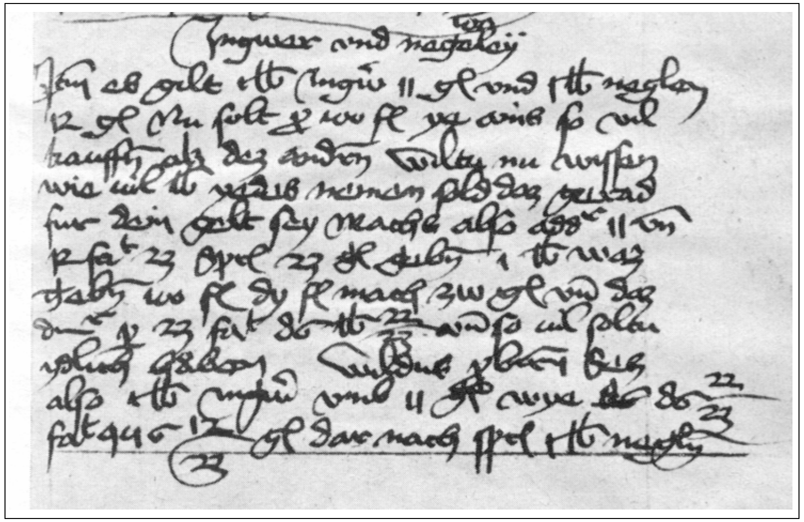
Algorist und Abacist (Gregor Reisch, *Margarita Philosophica* 1503)

Ingwer und Nelken: Warenrechnung

„Ingwer und Negelei
Item. Es gilt 1 lb Ingwer 11 gr und 1 lb Neglein
12 gr. Nu sollt pro 100 fl je eines so viel
kaufen als des andern. Willtu nun wissen,
wie viel lb jedes nehmen sollt, das gerad
für dein Geld sei. Mach's also: Addir 11 und
12, facit 23. Sprich: 23 gr geben 1 lb, was
geben 100 fl? Die fl mach zu gr und das
dividir per 23, facit 86 lb 22/23 [nicht 22/33] und so viel solltu
jeglich haben. Willtu probiren, setz
also: 1 lb Ingwer um 11 gr, wie 86 22/23?
Facit 956 12/23 gr. Darnach sprich: 1 lb Neglein

um 12 gr, wie 86 22/23? Facit 1043 [nicht 1047] gr 11/23.
Nu addir die gr zusamm, facit 2000 gr, ist
gleich 100 fl in Gold."

(AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 92; p. 56-57; Tafel IV; Clm 14908, 79)



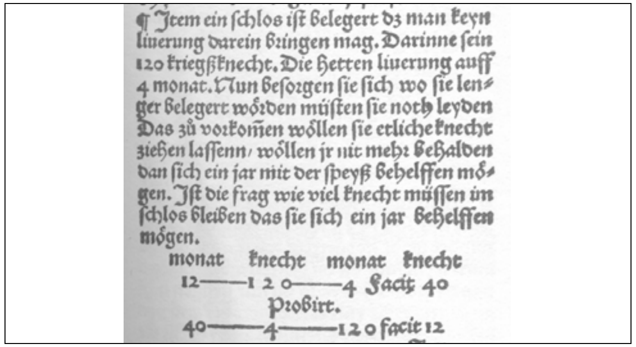
(= Widmann 1489, 90v-91; Gärtner 2000, Nr. 136, p. 413)

Anmerkung: 1 fl = 20 gr

Warentransport in ein belagertes Schloss

„Item. Ein Schloss ist belagert, das man kein
Lieferung darein bringen mag. Darin sein
120 Kriegsknecht. Die hätten Lieferung auf
4 Monat. Nun sorgen sie sich, wo sie län-
ger belagert würden, müssten sie Not leiden.
Das zuvorkommen, wollen sie etliche Knecht
ziehen lassen, wollen sie nit mehr behalten,
denn sich ein Jahr mit der Speis behelfen mö-
gen. Ist die Frag: Wie viel Knecht müssen im
Schloss bleiben, dass sie sich ein Jahr behelfen
mögen."

(Apian 1527, I 5)



¶ Item ein ſchlos iſt belegert dz man keyn
liuerung darein bringen mag. Darinne ſein
120 kriegßknecht. Die hetten liuerung auff
4 monat. Nun beſorgen ſie ſich wo ſie len-
ger belegert wörden müſten ſie noth leyden
Das zů vorkomen wöllen ſie etliche knecht
ziehen laſſenn / wöllen jr nit mehr behalden
dan ſich ein jar mit der ſpeyß behelffen mö-
gen. Iſt die frag wie viel knecht müſſen im
ſchlos bleiben das ſie ſich ein jar behelffen
mögen.

monat	knecht	monat	knecht	
12	120	4	Facit 40	

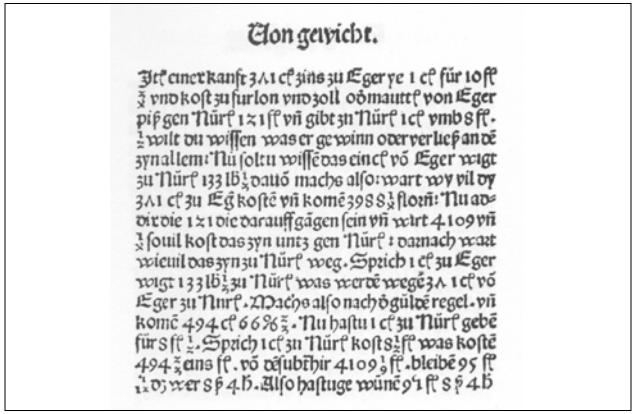
Probirt.

40 —— 4 —— 120 facit 12

Warentransport und Gewicht 1

„Item. Einer kauft 371 ct Zinns zu Eger je 1 ct für 10 fl ¾ und kost zu Fuhrlohn und Zoll oder Maut von Eger bis gen Nürnberg 121 fl und gibt zu Nürnberg 1 ct um 8 fl ½. Willtu wissen, was er gewinn oder verlies [verlier] an dem Zinn allem. Nun solltu wissen, dass Zinn von Eger wiegt zu Nürnberg 113 lb 1/3. Davon mach's also: …"

(Wagner 1483; Schröder 1988, 56, 191)



Von gewicht.

Jtē einer kauft 371 ct zins zu Eger ye 1 ct für 10 fl ¾ vnd kost zu furlon vnd zoll od mautt von Eger piß gen Nürē 121 fl vñ gibt zu Nürē 1 ct vmb 8 fl ½ wilt du wissen was er gewinn oder verließ an dē zyn allem: Nu soltu wissē das ein ct vō Eger wigt zu Nürē 133 lb ⅓ dauō machs also: wart wy vil dy 371 ct zu Eḡ kostē vñ komē 3988 ¼ florñ: Nu ad-dir die 121 die darauff gāgen sein vñ wirt 4109 vñ ¼ souil kost das zyn untz gen Nürē: darnach wart wieuil das zyn zu Nürē weg. Sprich 1 ct zu Eger wigt 133 lb ⅓ zu Nürē was werdē wegē 371 ct vō Eger zu Nurē. Machs also nach d gūldē regel. vñ komē 494 ct 66 ⅔. Nu hastu 1 ct zu Nürē gebē für 8 fl ½. Sprich 1 ct zu Nürē kost 8 ½ fl was kostē 494 ⅔ eins fl. vō dē subtrahir 4109 ¼ fl. bleibē 95 fl 5/12 dz wer 8 ß 4 h. Also hastu gewūnē 95 fl 8 ß 4 h

(= Widmann 1489, 140-140v; Gärtner 2000, Nr. 228, p. 449)

Einkauf: 371 Zentner kosten zu Eger 371 · 10,75 fl = 3988 1/4 fl,
hinzu kommen 121 fl für Transport etc,
das ergibt einen Einstandspreis von 4109 1/4 fl.

1 ct(Eger) = 133 1/3 lb = 1 1/3 ct(Nürnberg), denn 1 ct(Nürnberg) = 100 lb

371 ct(Eger) = 371 · 133 1/3 ct(Nürnberg) = 494 2/3 ct(Nürnberg)

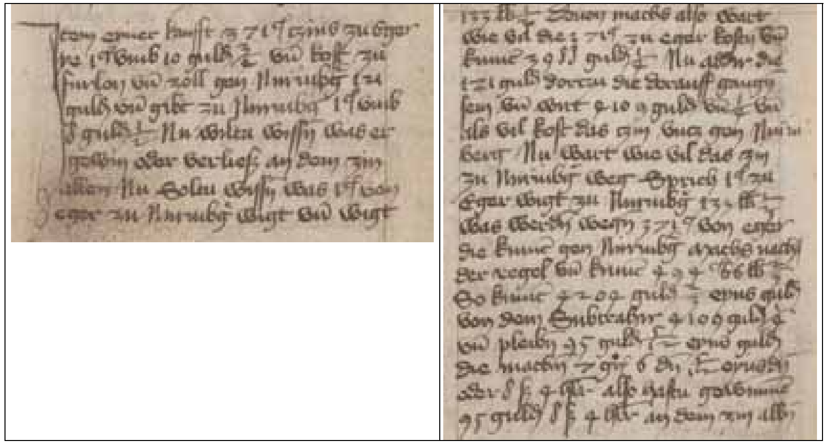
Verkauf: 494 2/3 · 8 1/2 fl = 4204 2/3 fl.

Gewinn: 4204 2/3 fl – 4109 1/4 fl = 95 5/12 fl.

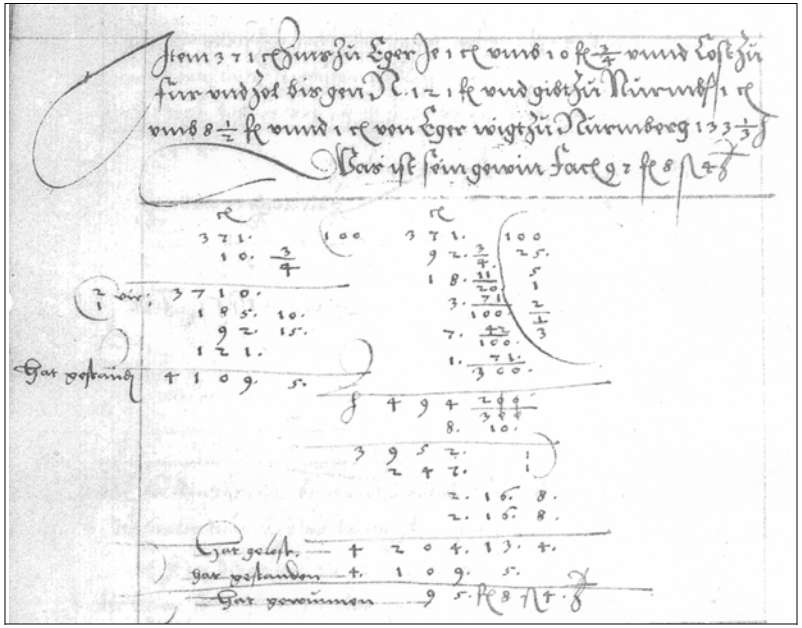
Ähnlich mit anderen Zahlenwerten (Ries 1574, 38).

Ähnlich: Ingwer von Venedig nach Nürnberg (Widmann 1489, 91-91v; Gärtner 2000, Nr. 137, p. 413 = Widmann 1489, 139v-140; Gärtner 2000, Nr. 227, p. 449).

Warentransport und Gewicht 2



(Ars arithmetica ~ 1480; Vind. 3029, 33-33v)



(Behaim; Neudörfer 1547, Augsburg 4° Cod. 138, 35v)

<u>Warentausch, Stich, Stechen, Boreat (< it. baratto) 1</u>

„2 wollen stechen mit Kaufmannschaft, der eine hat 58 ct 31 lb Wachs, der ander hat 24 ct 23 lb Ingwer. Nun gilt 1 ct Wachs bar 8 fl, den setzt er am Stich dar für 9 fl, und 1 ct Ingwer gilt bar 19 fl, den will er als gleich dar setzen am Stich als jener sein Wachs. Nu willtu wissen, wie teuer 1 ct dar komm und welcher dem andern zugeben muss.“

(AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 191, p. 89)

Gleicher prozentualer Stich-Aufschlag, d.h. Bar-Preis : Stich-Preis = 8 : 9 = 19 : x

Stich-Preis für 1 ct Ingwer: x = 19 · 9/8 fl = 171/8 fl = 21 3/8 fl

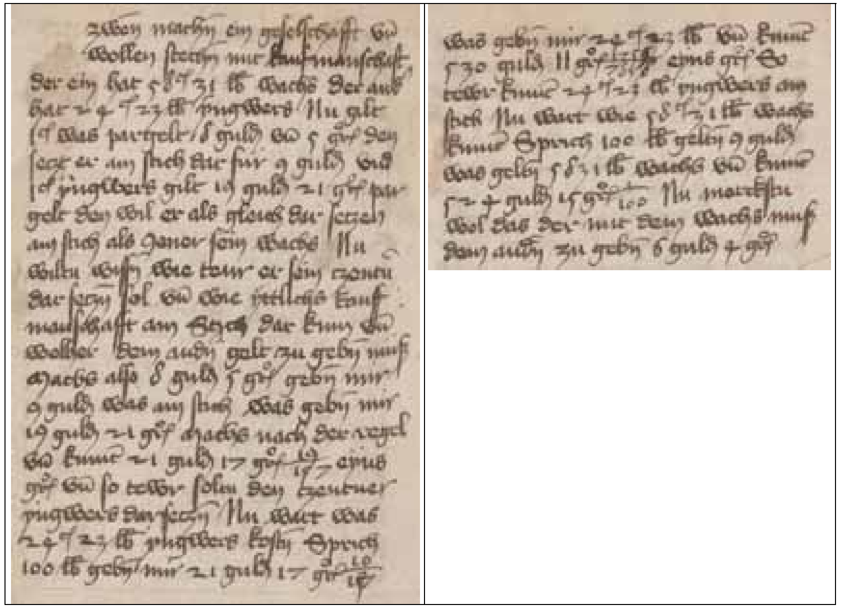
Stich-Preis für 24,23 ct Ingwer:
2423/100 · 171/8 fl = 414333/800 fl = 517 733/800 fl

Stich-Preis für 58,31 ct Wachs:
5831/100 · 9 fl = 52479/100 fl = 524 79/100 fl

Differenz: 52479/100 fl – 414333/800 fl =
(419832 – 414333)/800 fl = 5499/800 fl = 6 699/800 fl

So viel muss der Ingwer-Besitzer dem Wachs-Besitzer geben.

Mit geringfügig anderen Preisen:



(Ars arithmetica ~ 1480; Vind. 3029, 61v-62)

<u>Warentausch, Stich, Stechen, Boreat (< it. baratto) 2</u>

(Tropfke 526 [F. Calandri 1491, Nr. 57])

Regula augmenti et decrementi: Kauf von Tuch etc.

„Einer hat Geld bei ihm und will Tuch kaufen. Und wenn er 3 lb gibt pro 1 Ellen, so mangelt er 4 lb am Zahlen. Und wenn er 2 lb gibt pro 1 Ellen, so bleibt ihm 10 lb über. Queritur, was 1 Ellen hab golten, und wie viel Geldes bei ihm hat.
Mach's also: Nehmen wir [an], das das Stück [Tuch, also die Anzahl Ellen] sei 1 Ding [cosa, Unbekannte] gewesen. [Im Folgenden wird berechnet, wie viel Geld er bei sich hat.] Und er gibt 3 lb pro 1 Ellen. Sprich 3 mol 1∂ ist 3∂ | minus 4 lb, darum dass er spricht, er mangelt 4 lb am Zahlen, darum kommt 3∂ minus 4 lb. Nu sprich 2 mol 1∂ ist 2∂ und 10 lb mehr, darum dass er spricht, ihm bleibt 10 über. Nun ist 3∂ minus 4 lb dem andern gleich, das ist 2∂ 10 mer …"

(Dt. Algebra, 1461; Clm 14908, 144r-144v; Curtze 1895, 57; Dublette mit gleichem Wortlaut, aber nicht algebraischer Lösung: 46v; Curtze 1895, 39-40)

$3x - 4 = 2x + 10$ liefert $x = 14$ Ellen

14 Ellen · 2 lb/Elle +10 lb = 38 lb

Ähnlich: „Einer will ein Sack mit Anis kaufen. Und wenn er für jeglichs lb 12 pf gibt so bleiben ihm übrig 37 pf. So er aber für ein 1 lb 15 pf gibt, so zerrinnt ihm 44 pf … (Widmann 1489, 112-112v; Gärtner 2000, Nr. 182, p. 429). Lösung: 361 pf und 27 lb.

Frau mit Feigen und Kindern

„Ein Frau hat Feigen und hat auch Kinder, und sie gibt jeglichem Kind 12 Feigen, so bleibt ihr 37 Feigen … und gibt jeglichem Kind 15 Feigen, so zerrinnt ihr 44 Feigen …" (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 158, p. 75). Lösung: 27 Kinder und 361 Feigen.

Zahlenraten: Zwei Becher und ein Deckel

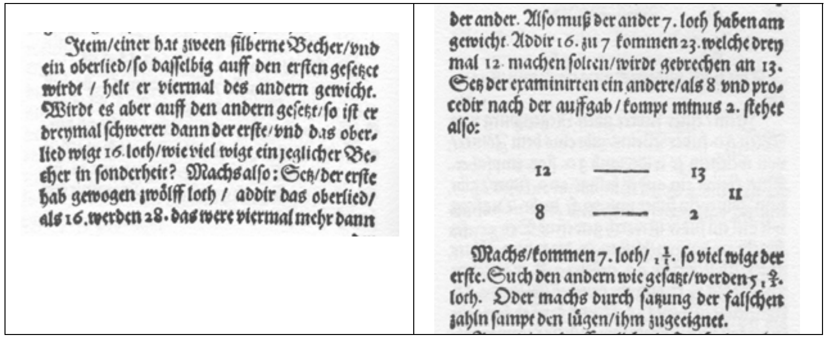
„Es sein 2 Becher und zwischen ihnen liegt ein Überlid [Deckel], das ist [al]so schwer: Wenn ich's auf den ersten Becher leg, so wiegt der selbige Becher 9 mal schwerer denn der ander. Wenn ich's aber auf den andern Becher leg, so ist der ander Becher mit dem Überlid zu 7 mal schwerer denn der erst. Nu ist die Frag, wie schwer das Überlid ist …"

(Widmann 1489, 146-146v; Gärtner 2000, Nr. 239, p. 453-454)

Mit gleichen Werten: „Item sint duo ciffi …" (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 78, p. 51).

Als ganzzahlige Lösung gibt Widmann an: l = 62, x = 10, y = 8.
Die kleinste ganzzahlige Lösung ist: l = 31, x = 5, y = 4.

Ries gibt das Gewicht des Deckels an, so dass die Lösung eindeutig wird.


Item/einer hat zween silberne Becher/vnd ein oberlied/so dasselbig auff den ersten gesetzt wirdt / helt er viermal des andern gewicht. Wirdt es aber auff den andern gesetzt/so ist er dreymal schwerer dann der erste/vnd das oberlied wigt 16. loth/wie viel wigt ein jeglicher Becher in sonderheit? Machs also: Setz/der erste hab gewogen zwölff loth / addir das oberlied/ als 16. werden 28. das were viermal mehr dann der ander. Also muß der ander 7. loth haben am gewicht. Addir 16. zu 7 kommen 23. welche drey mal 12. machen solten/wirdt gebrechen an 13. Setz der examinirten ein andere/als 8 vnd procedir nach der auffgab / kompt minus 2. stehet also:

12 —— 13
11
8 —— 2

Machs/kommen 7. loth/ 3/11. so viel wigt der erste. Such den andern wie gesatzt/werden 5, 9/11. loth. Oder machs durch satzung der falschen zahln sampt den lügen/ihm zugeeignet.

(Ries 1574, 64v-65)

(Tropfke 612 [Widmann (1489) 1508, 98v])

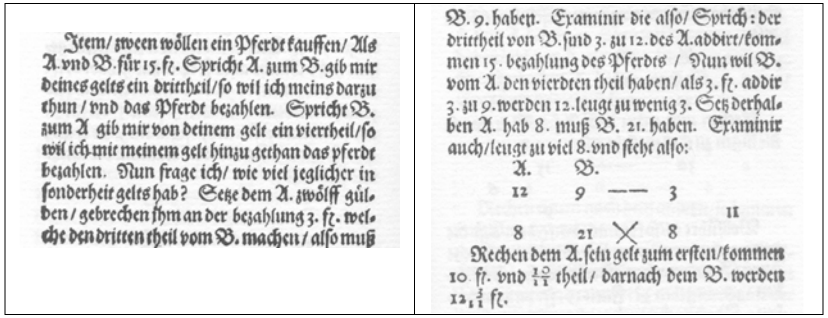
Die gefundene Börse

Zwei Personen bestimmen deren Inhalt im Vergleich zu ihrem eigenen Besitz (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 159, p. 76). Aber erst bei drei Personen ist die Lösung eindeutig (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 113, p. 63-64 und Nr. 227, p. 105).

Zahlenraten:
Zwei wollen ein Pferd kaufen, doch das Geld jedes einzelnen reicht nicht

„Item. Zwei wollen ein Pferd kaufen, als A und B für 15 fl. Spricht A zum B: «Gib mir deines Gelds ein Drittel, so will ich meins dazu tun und das Pferd bezahlen». Spricht B zum A: «Gib mir von deinem Geld ein Viertel, so will ich mit meinem Geld hinzu getan das Pferd bezahlen». Nun frage ich, wie viel jeglicher in Sonderheit Gelds hab …“

(Ries 1574, 61v-62)


Item/ zween wöllen ein Pferdt kauffen/ Als A. vnd B. für 15. fl. Spricht A. zum B. gib mir deines gelts ein drittheil/ so wil ich meins darzu thun/ vnd das Pferdt bezahlen. Spricht B. zum A gib mir von deinem gelt ein viertheil/ so wil ich mit meinem gelt hinzu gethan das pferdt bezahlen. Nun frage ich/ wie viel jeglicher in sonderheit gelts hab? Setze dem A. zwölff gülden/ gebrechen jhm an der bezahlung 3. fl. welche den dritten theil vom B. machen/ also muß B. 9. haben. Examinir die also/ Sprich: der drittheil von B. sind 3. zu 12. des A. addirt/ kommen 15. bezahlung des Pferdts / Nun wil B. vom A. den vierdten theil haben/ als 3. fl. addir 3. zu 9. werden 12. leugt zu wenig 3. Setz derhalben A. hab 8. muß B. 21. haben. Examinir auch/ leugt zu viel 8. vnd steht also:

A.	B.		
12	9	——	3
			11
8	21	X	8

Rechen dem A. sein gelt zum ersten/ kommen 10. fl. vnd $\frac{10}{11}$ theil/ darnach dem B. werden $12\frac{3}{11}$ fl.

Lösung:

A habe a Gulden, B habe b Gulden.

(1) a + b/3 = 15

(2) a/4 + b = 15 → b = 15 – a/4

In (1) a + (15 – a/4)/3 = a + 5 – a/12 = 11/12 a + 5 = 15

a = 10 · 12/11 = 120/11 = 10 10/11 [fl]

In (2) b = 15 – (120/11)/4 = 15 – 30/11 = 15 – 2 8/11 = 12 3/11

Zahlenraten: Grüß-euch-Gott-Aufgaben

Gespräche zwischen Gänsen und Gänsebruchteilen

„Es spricht 1 Gans zu den anderen Gänsen: Ich grüß euch all 30 Gäns! Spricht ein Gans: Unser sein nit 30, denn wären unser noch als viel und noch als viel und halber Teil als viel, so wären unser 30. Nun ist die Frag, wie viel der Gäns sein.“

(AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 128, p. 67; ähnlich Nr. 129)

Lösung: 3 ½ x = 30, also x = 8 4/7 Gänse.

Ähnlich mit „Gesellen“ ohne Bruchteile

„Einer spricht: «Grüß euch Gott, Gesellen alle dreißig.» Antwort einer: «Wenn unser noch so viel und halb so viel wären, so wären unser dreißig.» Die Frag: Wie viel ihr gewesen? …“ (Ries 1574, 58):

Lösung: 12 Gesellen.

Ähnlich mit Jungfrauen ohne Bruchteile

„Danach geht er [ein Jüngling] weiter, so begegnen ihm Jungfrauen. Also spricht er zu der einen: «Von wanne geht ihr all zehn?» Antwort ihm die selbige sprechend: «Unser sein nicht 10, sondern wenn unser noch so viel wären, als unser sein, und das dritte Teil so viel, so wären unser so viel über 10, als itzund unser ist unter 10.» Nun ist die Frag, wie viel der Jungfrauen gewest ist. Facit 6“ (Widmann 1489, 235-235v; Gärtner 2000, Nr. 383, p. 511).

Mettenbesuch (kleinstes gemeinsames Vielfaches)

„Sein 5 Chorschüler, derer 1 geht all Nacht gen Metten, die ander über die ander Nacht, die dritt über die dritten et cetera. Queritur, wann sie all zusammenkommen in einer Metten. Mach’s also: Multiplicir die Zahl miteinander, facit 120 Nacht.“

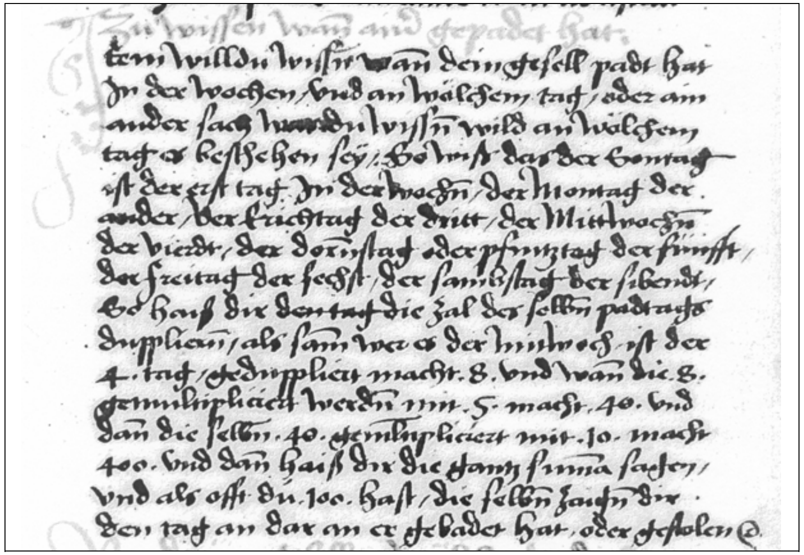
(AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 84, p. 54)

Die richtige Lösung ist 60 Nächte.

Zahlenraten: Zu wissen, wann einer gebadet hat

„Item. Willst du wissen, wann dein Gesell padt [gebadet] hat in der Wochen und an wölchem Tag, oder ein ander Sach, von dem du wissen willst, an wölchem Tag es geschehen sei, so wiß, dass der Sonntag ist der erst Tag in der Wochen, der Montag der ander, der Erichtag der dritt, der Mittwochen der viert, der Donnerstag oder Pfinztag der fünft, der Freitag der sechst, der Samstag der siebent. So heiß dir die Zahl des selbigen Badtags duplieren; als samm war es der Mittwoch, ist der 4. Tag, gedupliert macht 8. Und wann die 8 gemultipliciert werden mit 5, macht 40. Und dann die selben 40 gemultipliciert mit 10 macht 400. Und dann heiß dir die ganz Summa sagen, und als oft du 100 hast, die selben zeigen dir den Tag an, an dem er gebadet hat oder gestohlen etc.“

(Linienrechenbuch, Tegernsee ~1480; Cgm 740, 31v; Kaunzner 1970, 14)



Der befragte „Gesell“ musste mathematisch schon ziemlich unbedarft sein, wenn er diese Multiplikation der Tagzahl mit 100 nicht durchschaute, auch wenn sie mit ·2·5·10 etwas verschleiert gestaltet war.

Zahlenraten: Fingerlein 1

„Einer hat ein Fingerlein an dem Finger. Nun willtu wissen, welche Person das Fingerlein hab und an welchem Finger und an welchem Glied.

Mach’s also: Sprich, dass einer unter ihnen zähle, und heiß ihn anheben an dem ersten, und heiß ihn zählen bis auf den, der das Fingerlein hat. Darnach heiß ihn dupliren die selbe Zahl, darnach heiß ihn addieren 5, darnach multipliciren mit 5. Darnach heiß ihn addiren den Finger und soll anheben zu zählen von dem kleinsten Finger der rechten Hand. Darnach heiß ihn 0 vor die Zahl setzen, das ist, heiß ihn die Zahl multiplicirn mit 10 und darnach heiß ihn addiren das Glied.

Und wenn das geschehen ist, so subtrahir von der gemachten Zahl 250, und was da bleibt, zeigt dir dein Meinung, wenn die erst Zahl gegen der linken Hand bedeut die Person, die ander Zahl den Finger, die dritt Zahl das Glied.

Doch je merk, wenn die ander Zahl wird 0, so nimm almol 1 von der dritten Figur und addir’s zu 0, wird der 10 Finger. Und was dann bleibt darnach, bedeut die Person. Du fragst, warum soll man da subtrahirn 250 und hat vor[her] subtrahirt 350. Willdu das wissen, so nimm die kleinste Zahl, das ist 1 Mann, 1 Finger, 1 Glied. Nun mach’s nach der Regel, kummt 361. Davon muss man subtrahiren 1 Zahl, dass 1.1.1 bleibt, und das ist keine denn 250.“

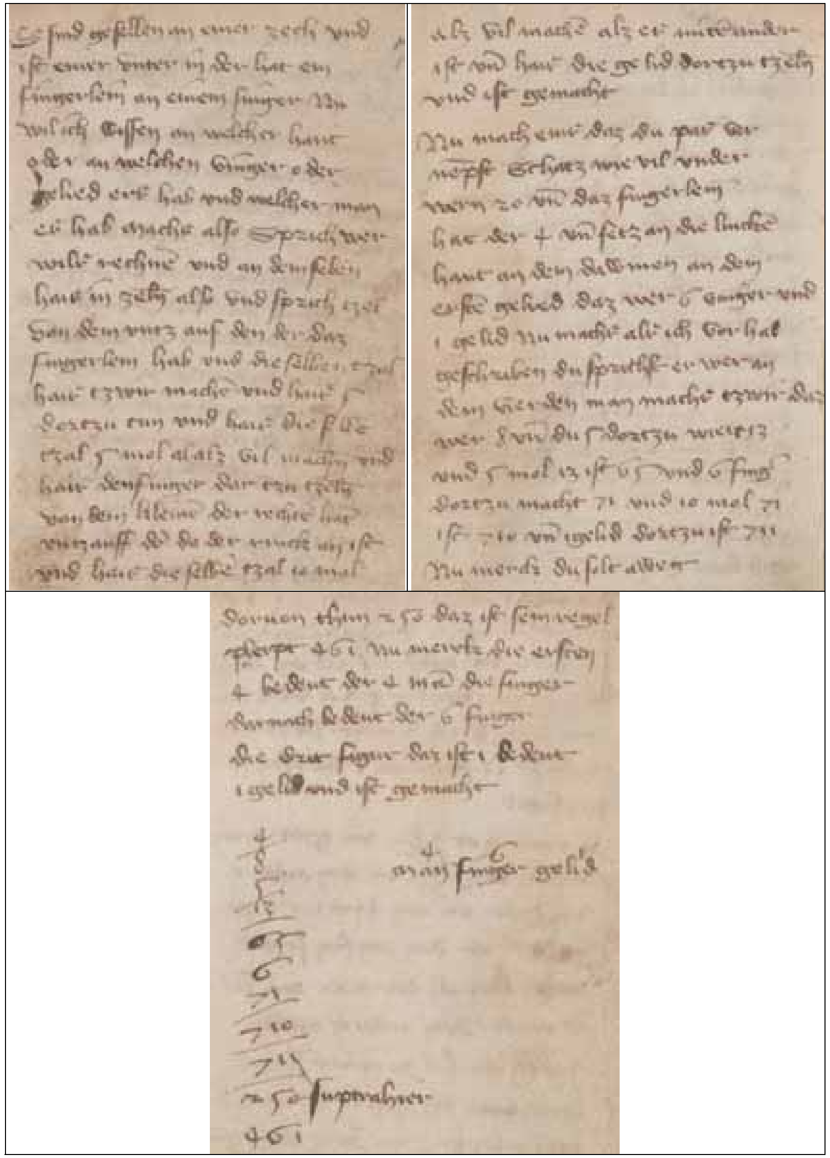
(AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 272, p. 123-124)
(Nr. 347 lat.; bloßes Zahlenraten ohne Geschichte: Nr. 270, 271, 310)

(((Person · 2) + 5) · 5) + Finger) · 10) + Fingerglied
Person · 100 + 250 + Finger · 10 + Fingerglied


¶ Volgen etliche ſchympfliche vñ
Kurtzweylige Exempl.
¶ Item eß Sitzen etlich perſonen an einer
zech/ vnnd einer vnder jn hat einen Ring.
Spricht einer vnd jn/ vn-
ſer einer hat eynen ring an
einē finger kanſtu derratñ
welcher den ring hat/ vnd
an welchē finger vñ glidt.
Thu jm alßo. Nym dir ey
nen für am Tiſch/ Sprich
an dem wollen wir die re-
nung anheben/ vnd wollen rechts vmbher
zelen/ das iſt von dem erſten/ zů der rechten
handt. Nach der zelung ſol der daum ann
der rechten handt/ der erſt finger ſein / vnd
der daum der lincken der 10 finger/ auch ſol
ein jtlich nagelglid das erſt gelid ſein . Dar
auf ſtel die rechnung. Wan du den ring fin
den wilt/ ſo heyß die zal der pſonē duplirn/
vnd zů dem duplat 5 addirn/ die ſuma mit
5 multiplicirn/ vnd die zall des fingers dar
zů addirn/ das product heyß mit 10 multi-
plicirn/ dar zů thuen die zal des glids . Dar
nach heiß dir anzeigen die gantze ſuma/ vō
der ſuma ſubtrahir 250. Auß dē reſt ſoltu
die perſon/ den finger vnd auch das glid al
ſo findē/ die erſte figur bey der rechtē handt
zaigt an das glidt/ die ander den finger/ die
vberige figurē wie viel jr ſein zaigen die zal
der perſon an. Nym ein gleichnus. Jch ſetz
die Fünfftzehet pſon hab den ring am drit-
ten glid des mittel fingers der linckē hand.
Machs alſo/ die zall der perſon duplir ft 30
Addir 5 facit 35/ multiplicir mit 5 ft. 175.
Die zall des fingers addir facit 183/ das pro
duct mit 10 multiplicir facit 1830. Die zall
des glids addir facit 1833. Von der ſumma
ſubtrahir 250 bleibē 1583 / bedeut das drit
glidt/ den achten finger vnd die Fünfftze-
het perſonn.

(Apian 1527, M 7-7v)

Zahlenraten: Fingerlein 2



(Ars arithmetica ~ 1480; Vind. 3029, 72-73)

Zahlenraten: Regula virginum 1 (positive, ganzzahlige Lösungen)

Zechenaufgabe

„12 Personen, Ritter, Knecht und Junckfraw, sollen teilen 12 Brote: einem Ritter 2 Brot, 1 Knecht 1/4, einer Junckfraw 1/2 Teil. Queritur wie viel etc.? Responditur: 1 Junckfraw, 6 Knecht und 5 Ritter.“

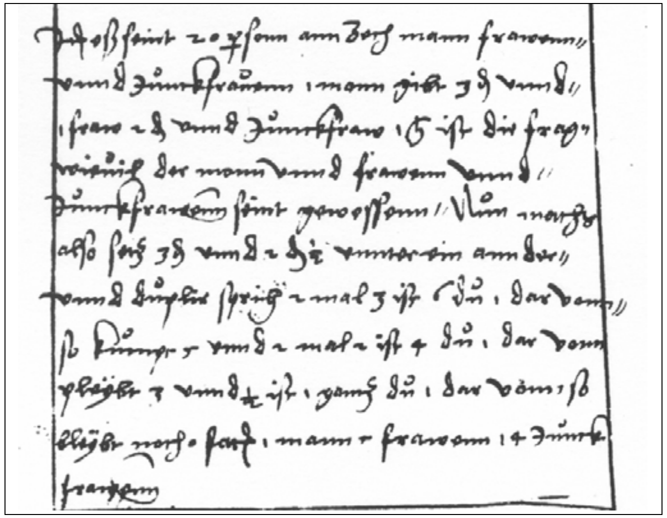
(AR, 1460; Clm 14908, 85v; Vogel 1954, Nr. 121, p. 66 = Curtze 1894, 403)

Es seien x Ritter, y Knechte, 12 – x – y Jungfrauen.

$2x + \frac{1}{4} y + \frac{1}{2}(12 - x - y) = 12$ liefert $y = 6x - 24$.

$y > 0 \rightarrow x > 4$
$y < 12 \rightarrow x < 6$ Also $x = 5$.

Ähnlich: „Item. Es seint 20 Personen an Zech, Mann, Frauen
und Jungfrauen. 1 Mann gibt 3 pf und
1 Frau 2 pf und [1] Jungfrau ½ pf. Ist die Frag,
wie viel der Mann und Frauen und
Jungfrauen seint gewesen. Nun mach's
also: Setz 3 dn und 2 dn ½ unter einander
und duplier. Sprich 2 mal 3 ist 6 dn, 1 davon,
so kommt 5. Und 2 mal 2 ist 4 dn, 1 davon,
bleibt 3. Und ½ ist ein ganz dn, 1 davon, so
bleibt noch 0. Facit 1 Mann, 5 Frauen, 14 Jung-
frauen.“ (Weltzell 1523; UB München 4° Cod. ms. 718, 80v)



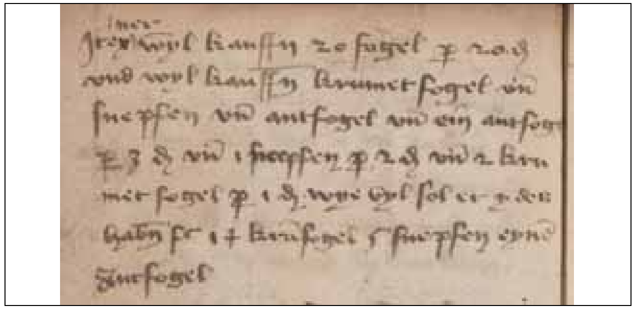
Zahlenraten: Regula virginum 2 (positive, ganzzahlige Lösungen)

Die gleichen Zahlenwerte wie bei Weltzell – seine Rechnung ist unverständlich – erscheinen in der folgenden Aufgabe zum Geflügelkauf.

Geflügelkauf

„Item. Einer will kaufen 20 Vogel pro 20 pf
und will kaufen Krumetvogel [Krametvogel, Wacholderdrossel, Wiedehopf] und
Schnepfen und Antvogel [Enten]. Und ein Antvogel
pro 3 pf und 1 Schnepfen pro 2 pf und 2 Kru-
metvogel pro 1 pf. Wie viel soll er jedes
haben? Facit 14 Krumetvogel, 5 Schnepfen, einen Antvogel.“

(Ars arithmetica ~ 1480; Vind. 3029, 73v)



Auch lösbar für 16 Krametsvögel und 4 Enten (ohne Schnepfen).

Es seien x Krametsvögel, y Schnepfen und 20 – x – y Enten:

$1/2\, x + 2y + 3(20 - x - y) = 20 \quad \rightarrow 1/2\, x + 2y + 60 - 3x - 3y = 20$
$-\, 5/2\, x - y = -\, 40$

$x = 2/5\, (40 - y)$, also muss y durch 5 teilbar sein, und damit ist y = 5.

Daraus folgt x = 14.

Zahlenraten: Regula virginum 3 (Positive, ganzzahlige Lösungen)

Viehkauf


Adam Risen.
Vihekauff.

Item/ einer hat 100. fl. dafür wil er 100. haupt Vihes kauffen / nemlich / Ochsen/ Schwein/ Kälber/ vnd Geissen/ kost ein Ochs 4 fl. ein Schwein anderthalben fl. ein Kalb einen halben fl. vnd ein Geiß ein ort von einem fl. wie viel sol er jeglicher haben für die 100. fl?

(Ries 1574, 71)

Lösung: 12 Ochsen (48 fl), 20 Schweine (30 fl), 20 Kälber (10 fl), 48 Ziegen (12 fl).

Anmerkung: 1 Ort = 1/4 fl

Einfache Leistungsaufgabe: Kerzen brennen

„4 Kirtzen prynnen in 5 horis 2 ½ lb Wachs hin. Wie viel lb Wachs prinett an 16 Kirtzen hin in 11 horis?“ (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 28, p. 35). Lösung: 22 lb.

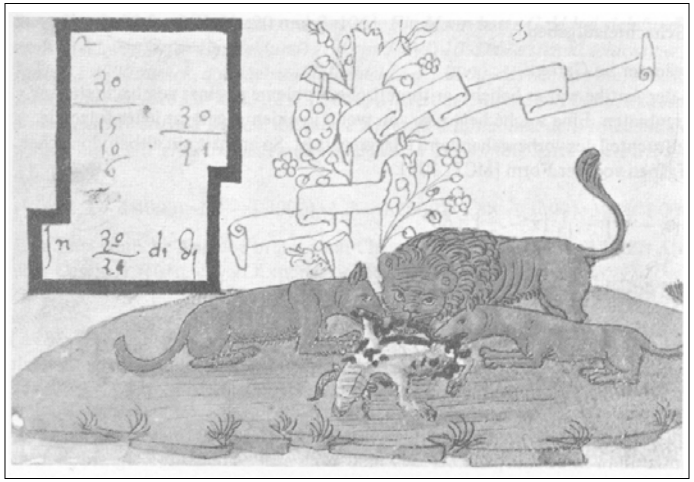
Leistungsaufgaben: Löwe, Wolf und Hund verzehren ein Schaf

„Item. Des gleichen 1 Leb und 1 Hunt und 1 Wolff. Die essen miteinander 1 Schoff. Und der Leb isst das Schoff allein in einer Stund, und der Wolff in 4 Stunden und der Hunt in 6 Stunden. Nun ist die Frage, wenn sie das Schoff alle 3 miteinander essen, in wie langer Zeit sie das essen.

Mach’s also: Multiplicir 1 Stund ·4·6 miteinander, facit 24. Nun nimm 1 Ganzes von 24, ist 24, und 1/4 von 24, ist 6, und 1/6 von 24, ist 4. Darnach addir die zusammen, facit 34. Setz also 24/34, facit 12/17 [Stunden], macht 42 Minuten 6/17 und ist die Zeit.“

(Widmann 1489, 138-138v; Gärtner 2000, Nr. 223, p. 448)

Zum Verständnis der genannten Bruchaddition muss man etwas ausholen. Der Löwe bringt es auf eine Fressgeschwindigkeit von 1 Schaf/h, der Wolf auf 1/4, der Hund auf 1/6, die tierische Feinschmeckergemeinschaft auf die Summe der Einzelfressgeschwindigkeiten, nämlich auf (1 + 1/4 + 1/6) Schafe/h = 17/12 Schafe/h. Das eine Schaf wird daher in 12/17 Stunden verzehrt. Wenn da nicht noch die Fressgeschwindigkeit des Löwen in Bezug auf Hunde und Wölfe wäre …



Löwe, Wolf, Fuchs, Ziege (Tropfke 581 [F. Calandri 1491, 97v])

Ähnliche Leistungsaufgaben

Fass mit drei Zapfen

„Item. Es war ein Fass, das hat 3 Zapfen. Wenn man den
ersten zög, so ging’s aus in 2 Tagen. Mit dem andern
Zapf ging’s aus in 3 Tagen. Mit dem dritten Za-
fen gings aus in 4 Tagen. Und wenn man sie alle
drei zeucht [zöge], wie lang muss es ausrinnen? …“

(Wagner 1483; Schröder 1988, 114, 224)

Regel von eim vaß.

Item Es wer ein vaß das het 3 zapff wen man den
ersten züg so giengs aus in 2 tagen. Mit dem andn
zapff giengs aus in 3 tagen. Mit dem dritten za-
pffen giengs aus in 4 tagen. Und wen man si alle
drey zeucht wie lang muß es ausrinnen. Machs
also vind ein zal dar inn du hast 1/2 1/3 1/4 das ist 12 und 1/2
von 12 ist 6 und 1/3 von 12 ist 4 und 1/4 von 12 ist 3 ad-
dirs zesamen ist 13 und das ist dein teyler und dy zal
dy du gefunden hast ist 12. Nu teil 12 mit 13 ist 12/13
eins tags das macht 11 ortter und 13 punckt und ist
gemacht. und 12 ortter ist 1 tag und 169 punckt ist
ein ort etc.

Lösung: Fließgeschwindigkeiten 1/2, 1/3 und 1/4 aufaddieren, ergibt 13/12. Der Kehrwert davon liefert die Fließdauer 12/13 Tage. Weitergerechnet wird mit 1 Tag = 12 Örter und 1 Ort = 169 Punkt zum Endergebnis 11 Örter und 13 Punkte.

Ähnlich mit anderen Zahlenwerten: „Es ist ein Fass voll Wassers, darein geht 8 Eimer und hat 3 Zapfen …“ (Widmann 1489, 137-137v; Gärtner 2000, Nr. 222, p. 447).

Schifffahrt (Zahlenwerte wie Fass)

„Es ging 1 Schiff von Alkaier [Kairo] gen Constantinopel, hat 3 Segel. Und mit dem großen Segel ging es 2 menses, mit dem andern 3 und mit minsten 4 menses. Und wenn man all 3 Segel aufspannt, in wie viel Monaten sie gen Constantinopel kommen? Facit 12/13 eines Monates, ist 27 Tag 9 horae.

(AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 191, p. 89)

Haus bauen

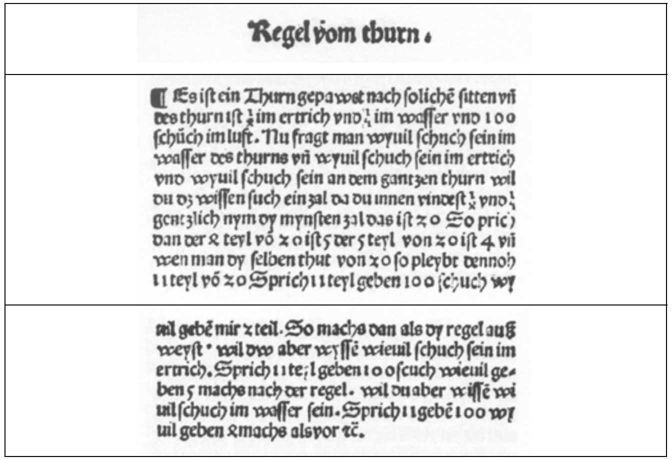
„3 machen ein Haus, primus facit in 7 diebus, secundus in 5 diebus, tertius in 4 diebus, und wann sie das Haus haben gemacht? …“ (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 70; p. 48-49) . Lösung: 140/83 Tage.

Ähnlich: „Es sind 4 Meister,die wollen 1 Haus machen …“ (Widmann 1489, 148-148v; Gärtner 2000, Nr. 243, p. 455).

Regel vom Turm 1 (Bruchrechnung)

„Es ist ein Thurn gebaut nach solchen Sitten und
des Thurn ist 1/4 im Erdreich und 1/5 im Wasser und 100
Schuch im Luft. Nun fragt man, wie viel Schuch sein im
Wasser des Thurns und wie viel Schuch sein im Erdreich
und wie viel Schuch sein an dem ganzen Thurn …“

(Wagner 1483; Schröder 1988, 110-111, 222-223)



Regel vom thurn.

Es ist ein Thurn gepawet nach solichē sitten vñ des thurn ist ¼ im ertrich vnd ⅕ im wasser vnd 100 schůch im luft. Nu fragt man wyuil schuch sein im wasser des thurns vñ wyuil schuch sein im ertrich vnd wyuil schuch sein an dem gantzen thurn wil du dz wissen such ein zal da du innen vindest ¼ vnd ⅕ gemeinlich nym dy mynsten zal das ist 20 So prich dan der ¼ teyl vō 20 ist 5 der 5 teyl von 20 ist 4 vñ wen man dy selben thut von 20 so pleybt dennoch 11 teyl vō 20 Sprich 11 teyl geben 100 schuch wy vil gebē mir 20 teil. So machs dan als dy regel ausweyst. wil dw aber wissē wieuil schuch sein im ertrich. Sprich 11 te; 1 geben 100 schuch wieuil geben 5 machs nach der regel. wil du aber wissē wi uil schuch im wasser sein. Sprich 11 gebē 100 wy uil geben 4 machs als vor etc.

Lösung: 1 – (1/4 + 1/5) = 1 – 9/20 = 11/20 ≡ 100 Schuh; Turmhöhe 2000/11 Schuh

Ähnlich: „Ein Thurn ist ¼ im Erdreich und 10 Schuch im Wasser und 3/5 im Luft. Nun frag ich, wie lang der Thurn sei und wie viel Schuch im Wasser sei und wie viel im Luft …“ (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 107, p. 62). Lösung: 3/20 = 10 Schuh.

(= Widmann 1489, 150v; Gärtner 2000, Nr. 248, p. 456)

Baum

Ähnlich: „Es ist ein Baum, der ist ob der Erden 1/4 und 1/5, und das unter der Erden ist, das ist 39 Ellen lang …“ (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 288, p. 131).

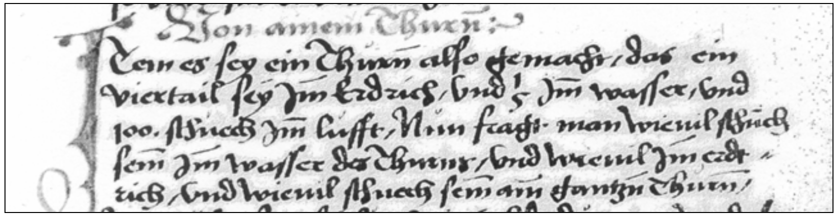
(= Widmann 1489, 151v; Gärtner 2000, Nr. 251, p. 457)

Regel vom Turm 2 (Bruchrechnung)

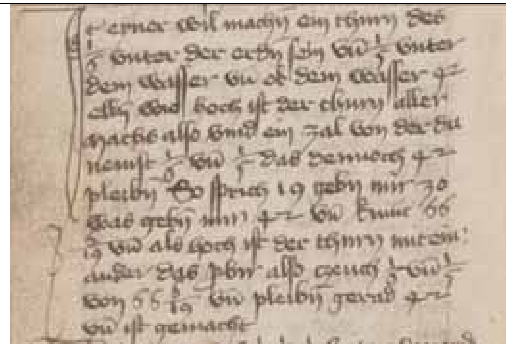
Fast so wie Wagner:

„Es sei ein Thurn also gemacht, dass ein
Vierteil sei im Erdreich und 1/5 im Wasser und
200 Schuch im Luft. Nun fragt man, wie viel Schuch
sein im Wasser des Thurns, und wie viel im Erdreich, und wie viel Schuech seien am ganzen Thurn.“

(Linienrechenbuch, Tegernsee ~1480; Cgm 740, 23r; Kaunzner 1970, 9).



Von ainem Thurn:
Item es sey ein Thurn also gemacht, das ein viertail sey im Erdrich, und ⅕ im wasser, und 100. schuech im lufft, Nun fragt man wieuil schuch sein im wasser des Thurns, und wieuil im erdtrich, und wieuil schuech sein am gantzen thurn,



(Ars arithmetica ~ 1480; Vind. 3029, 66v)

Bewegungsaufgaben (ein Lebewesen)

Taube im intermittierenden Sturzflug von einem Turm; Löwe im Brunnen 1

„Es war ein Turm, der ist 10 Ellen hoch, und es ist eine Taube und fliegt all Tag herab 2/3 einer Ellen und fliegt wieder hinauf 1/4 [+] 1/3 einer Ellen. Nun frag ich, in wie viel Tagen die Taub auf die Erden kumpt [kommt]. Et fac sic: Zeuch ab [subtrahiere] 1/3 [+] 1/4 von 2/3, est 1/12 einer Ellen, und also viel fliegt die Taub herab all Tag. Nunc dic: 10 mol [mal] 12 est 120; in so viel Tagen kumpt sie herab auf die Erden.“

(AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 65; p. 47)

1/3 + 1/4 = 7/12 Ellen hinauf, 2/3 = 8/12 hinunter, macht 1/12 Ellen hinunter pro Tag; die Taube braucht für die 10 Ellen Turmhöhe also 120 Tage. Abgesehen von gewissen Alltagsproblemen der Taube im Lauf dieser Zeit ist die Aufgabe ein schönes Beispiel für Bruchrechnung.

Löwe im Brunnen

Diese Aufgabe ist auch unter dem Namen „Der Löwe im Brunnen – De leone in puteo“ bekannt, der von Leonardo (Fibonacci) von Pisa stammt (Liber abbaci 1202, ed. Boncompagni 1857, 177). Der Löwe, der täglich 1/7 Handbreit höher kommt, aber täglich wieder 1/9 Handbreit abrutscht, kommt glücklich nach 1575 Tagen aus dem Brunnen, wenn er bis dahin nicht verhungert ist.

Schlange in der Höhle

Das Problem findet sich schon bei Brahmagupta (ed. Colebrooke 1817, 283), Mahavira (ed. Rangacarya 1912, 89-90) und im Columbia-Algorismus (ed. Cowley 1923, Kap. 67). In einer Variante von Mahavira kriecht eine Schlange in eine Höhle. Wann ist sie drinnen, wenn ihr Schwanz täglich um eine bestimmte Länge wächst? (Vogel 1954, 177 und 224)

Taube im intermittierenden Sturzflug von einem Turm; Löwe im Brunnen 2

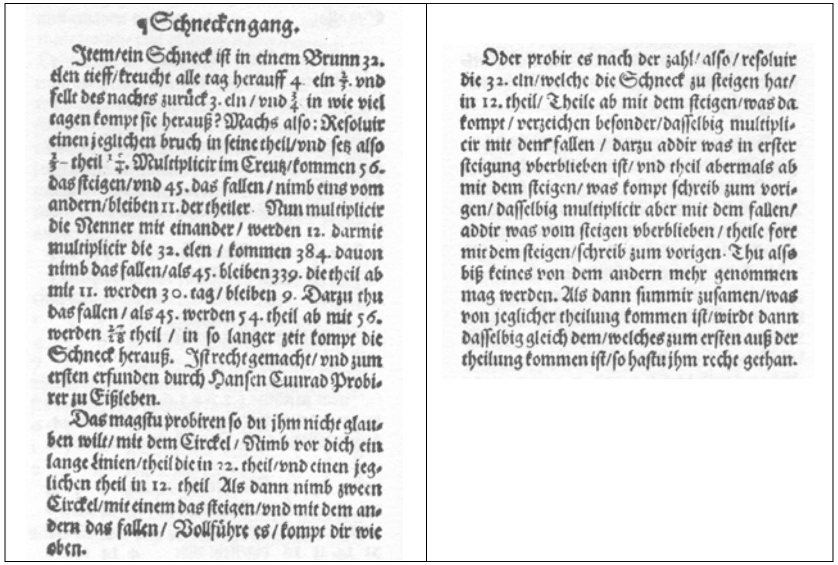
Schnecke im Brunnen

Adam Ries lässt statt des Löwen eine Schnecke aus dem Brunnen empor-„klettern“: „Item. Ein Schneck ist in einem Brunn, 32 Ellen tief, kriecht alle Tag herauf 4 2/3 Ellen und fällt des Nachts zurück 3 3/4 Ellen. In wie viel Tagen kommt sie heraus?“ (Ries 1574, 72v-73).

Resultierende Steiggeschwindigkeit:
4 2/3 – 3 3/4 = 14/3 – 15/4 = (56 – 45)/12 = 11/12 [Ellen pro Tag]

Zeit = Weg / Geschwindigkeit:
32 : 11/12 = 32 · 12/11 = 384/11 = 34 10/11 [Tage]

Adam Ries verrechnet sich, weil er in sehr umständlicher Weise die Fallgeschwindigkeit zweimal subtrahiert und einmal addiert, jedoch wegen falscher Nenner mit unterschiedlichen Werten. Die beiden Proben sind so ineffektiv und ungenau, dass ihm der Fehler nicht auffällt.



¶ Schneckengang.

Item/ein Schneck ist in einem Brunn 32. elen tieff/kreucht alle tag herauff 4. eln $\frac{2}{3}$. vnd fellt des nachts zurück 3. eln / vnd $\frac{3}{4}$ in wie viel tagen kompt sie herauß? Machs also: Resoluir einen jeglichen bruch in seine theil/vnd setz also $\frac{2}{3}$ – theil $\frac{15}{4}$. Multiplicir im Creutz/kommen 56. das steigen/vnd 45. das fallen / nimb eins vom andern/bleiben 11. der theiler. Nun multiplicir die Nenner mit einander / werden 12. darmit multiplicir die 32. elen / kommen 384. dauon nimb das fallen/als 45. bleiben 339. die theil ab mit 11. werden 30. tag / bleiben 9. Darzu thu das fallen / als 45. werden 54. theil ab mit 56. werden $\frac{27}{28}$ theil / in so langer zeit kompt die Schneck herauß. Ist recht gemacht/ vnd zum ersten erfunden durch Hansen Cunrad Probirer zu Eißleben.

Das magstu probiren so du jhm nicht glauben wilt/ mit dem Circkel / Nimb vor dich ein lange Linien/theil die in 32. theil/vnd einen jeglichen theil in 12. theil Als dann nimb zween Circkel/mit einem das steigen/vnd mit dem andern das fallen/ Vollführe es / kompt dir wie oben.

Oder probir es nach der zahl/ also / resoluir die 32. eln/welche die Schneck zu steigen hat/ in 12. theil/ Theile ab mit dem steigen/was da kompt / verzeichen besonder/dasselbig multiplicir mit dem fallen / darzu addir was in erster steigung vberblieben ist/ vnd theil abermals ab mit dem steigen/ was kompt schreib zum vorigen/ dasselbig multiplicir aber mit dem fallen/ addir was vom steigen vberblieben / theile fort mit dem steigen/schreib zum vorigen. Thu also biß keines von dem andern mehr genommen mag werden. Als dann summir zusamen/was von jeglicher theilung kommen ist/wirdt dann dasselbig gleich dem/welches zum ersten auß der theilung kommen ist/so hastu jhm recht gethan.

Wurzelgraberin

Mit den gleichen Zahlenwerten wie die Taube: „Es ist ein Berg, der ist 10 Ackerläng hoch. Auf dem ist eine alte Wurzelgraberin, die sucht alle Tag herab 2/3 einer Ackerläng und steigt wieder hinauf alle Tag 1/3 einer Ackerläng und 1/4. Nun ist die Frag, in wie viel Tagen sie hernieder von dem Berg auf die Erd komm. Facit 120 Tag“ (Widmann 1489, 235-235v; Gärtner 2000, Nr. 383, p. 511).

Taube im intermittierenden Sturzflug von einem Turm; Löwe im Brunnen 3

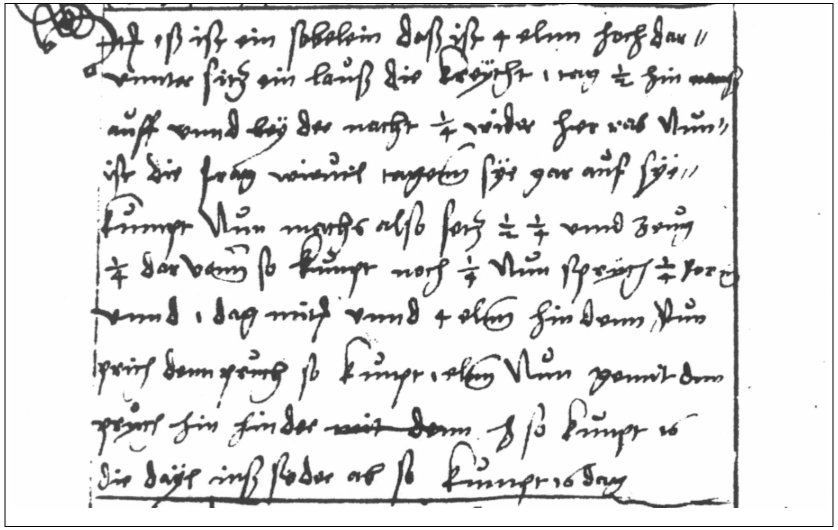
Laus am Säbel

Es ist geradezu unglaublich, mit welchem Phantasiereichtum zum mathematischen Problem der Vor- und Rückwärtsbewegung Geschichten erfunden wurden.

Jorg Weltzell lässt eine Laus an einem Säbel auf und ab krabbeln:

„Item. Es ist ein Säbelein, das ist 4 Ellen hoch. Dar-
unter sitzt ein Laus, die kreucht 1 Tag ½ hin-
auf, und bei der Nacht ¼ wieder herab. Nun
ist die Frag, [in] wie viel Tagen sie gar auf sie
kommt. Nun mach’s also: Setz ½, ¼, und zieh
¼ davon, so kommt noch ¼. Nun sprich ¼ vorn
und 1 Tag [als] Mittleres und 4 Ellen hinten. Nun
brich den Bruch, so kommt 1 Elle. Nun geh [?] mit [?] dem
Bruch hin hinter, so kommt 16
die teil ins vorder ab, so kommt 16 Tag.“

(Weltzell 1523; UB München 4° Cod. ms. 718, 83v)

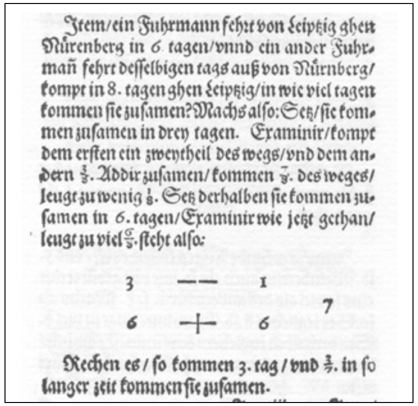


Rechenweg: 1/4 Elle : 1 Tag = 4 Ellen : x → x = 16 Tage

Begegnungsaufgaben 1: Zwei Fuhrleute begegnen sich

„Item. Ein Fuhrmann fährt von Leiptzig gen
Nürenberg in 6 Tagen und ein ander Fuhr-
mann fährt desselbigen Tags aus von Nürnberg,
kommt in 8 Tagen gen Leiptzig“. In wie viel Tagen
kommen sie zusammen? Mach’s also …“

(Ries 1574, 68)



Item/ein Fuhrmann fehrt von Leiptzig ghen Nürenberg in 6 tagen/vnnd ein ander Fuhrmañ fehrt desselbigen tags auß von Nürnberg/ kompt in 8. tagen ghen Leiptzig/in wie viel tagen kommen sie zusamen? Machs also: Setz/sie kommen zusamen in drey tagen. Examinir/kompt dem ersten ein zweytheil des wegs/vnd dem andern 3/8. Addir zusamen/kommen 7/8. des weges/ leugt zu wenig 1/8. Setz derhalben sie kommen zusamen in 6. tagen/Examinir wie jetzt gethan/ leugt zu viel 6/8. steht also:

3 —— 1
6 + 6 7

Rechen es/so kommen 3. tag/vnd 3/7. in so langer zeit kommen sie zusamen.

Lösung:

Entfernung von Leipzig nach Nürnberg: 1 (gesetzt); Geschwindigkeiten: 1/6 und 1/8.

$v = s/t \rightarrow t = s/v$

Beide fahren die gleiche Zeit, bis sie zusammenkommen; der erste legt dabei die Strecke s zurück; also:

$t = s_1/v_1 = s_2/v_2$

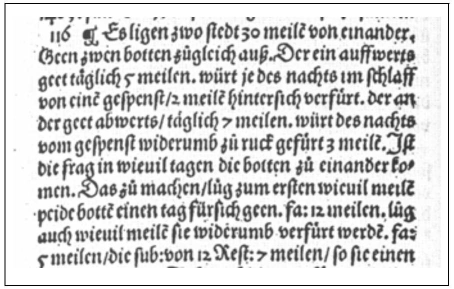
$t = s/(1/6) = (1-s)/(1/8) \rightarrow 6s = 8 - 8s \rightarrow 14s = 8 \rightarrow s = 4/7$

$t = s/v = (4/7)/(1/6) = 24/7 = 3\ 3/7$ [Tage]

Begegnungsaufgaben 2: Zwei Boten und ein Gespenst

„Es liegen zwei Städte 30 Meilen von einander, gehen zwei Boten zugleich aus. Der eine aufwärts geht täglich 5 Meilen, wird je des Nachts im Schlaf von einem Gespenst 2 Meilen hinter sich verführt. Der ander geht abwärts täglich 7 Meilen, wird des Nachts vom Gespenst wiederum zurückgeführt 3 Meilen. Ist die Frag, in wie viel Tagen die Boten zu einander kommen.“

(Rudolff 1525, M 8-8v, Nr. 116)



116 Es ligen zwo stedt 30 meilē von einander. Geen zwen botten züglcich auß. Der ein auffwerts geet täglich 5 meilen. würt je des nachts im schlaff von einē gespenst/2 meilē hintersich verfürt. der ander geet abwerts/ täglich 7 meilen. würt des nachts vom gespenst widerumb zü ruck gefürt 3 meilē. Ist die frag in wieuil tagen die botten zü einander komen. Das zü machen/lüg zum ersten wieuil meilē peide bottē einen tag fürsich geen. fa: 12 meilen. lüg auch wieuil meilē sie widerumb verfürt werdē. fa: 5 meilen/die sub: von 12 Rest: 7 meilen/ so sie einen

Lösung: Entfernung 30 Meilen

Resultierende Geschwindigkeiten: $v_1 = 5 – 2 = 3$ [M/d]; $v_2 = 7 – 3$ [M/d]

$t = s_1/v_1 = s_2/v_2$

$t = s/3 = (30–s)/4 \rightarrow 4s = 90 – 3s \rightarrow 7s = 90 \rightarrow s = 90/7$ [M]

$t = s/v = (90/7)/3 = 90/21 = 30/7 = 4\ 2/7$ [Tage]

Das ist aber falsch, da die Tagesgeschwindigkeit höher ist als die resultierende; die beiden Boten treffen sich also schon einen Tag früher, nämlich am 4. Tag, ohne dass das Gespenst noch ein viertes Mail in Aktion tritt.

Zustand am 4. Tag morgens

Bote 1: 3 · 3 = 9 Meilen gegangen; Bote 2: 3 · 4 = 12 Meilen gegangen

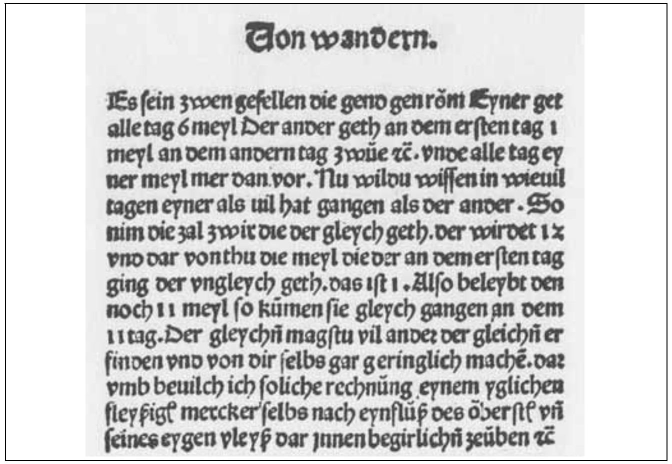
Restliche Entfernung: 30 – 12 – 9 = 9 [Meilen]

Bei Tagesgeschwindigkeiten von 5 und 7 Meilen/Tag (summiert 12 Meilen/Tag) sind die restlichen 9 Meilen gerade 3/4 der gesamten Tagesleistung der beiden Boten.
Sie treffen sich also nach 3 3/4 Tagen.

Verfolgungsaufgaben: Vom Wandern (arithmetische Reihe)

„Es sind zwei Gesellen, die gehen gen Rom. Einer geht alle Tage 6 Meilen. Der andere geht am ersten Tag 1 Meile, am anderen zweie etc. und alle Tage eine Meile mehr als zuvor. Nun willst du wissen, in wie viel Tagen einer soviel gegangen ist wie der andere. So nimm die Zahl zweifach von dem, der gleich geht, das wird 12. Und davon tu die Meilen, die der am ersten Tag ging, der ungleich geht; das ist 1. Also bleiben demnach 11 Meilen. So kommen sie gleich gegangen an dem 11. Tag.“

(Wagner 1483; Schröder 1988, 112, 223)



Von wandern.

Es sein zwen gesellen die gend gen röm Eyner get alle tag 6 meyl Der ander geth an dem ersten tag 1 meyl an dem andern tag zwüe &c. vnd alle tag eyner meyl mer dan vor. Nu wildu wissen in wieuil tagen eyner als uil hat gangen als der ander. So nim die zal zwir die der gleych geth. der wirdet 12 vnd dar von thu die meyl die der an dem ersten tag ging der vngleych geth. das ist 1. Also beleybt den noch 11 meyl so kümen sie gleych gangen an dem 11 tag. Der gleychñ magstu vil ander der gleichñ erfinden vnd von dir selbs gar geringlich machē. darvmb beuilch ich soliche rechnüng eynem yglichen fleyßigē mercker selbs nach eynflüß des öberstē vñ seines eygen vleyß dar innen begirlichñ zeüben &c

Ähnlich: „Sint duo ad Romam vel alias ituri …“ (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 53-56; p. 43-44, lat.).

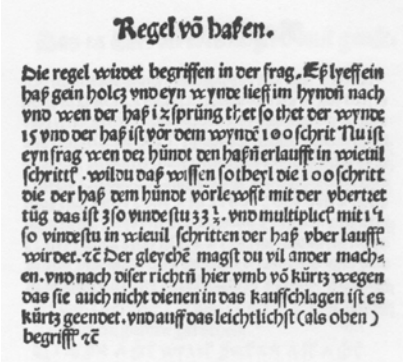
Die angegebene Lösung versteht man erst dann, wenn man eine Gleichung mit einer Unbekannten aufstellt. Sei also x die Anzahl Tage, bis beide Wanderer den gleichen Weg zurückgelegt haben. Der erste ist bis dahin 6x Meilen gegangen, der zweite $(1+x)x/2$. Gleichgesetzt und durch x dividiert, verbleibt $6 = (1+x)/2$. Dann kann man den Text weiterlesen (Multiplikation mit 2 etc.).

Hier sei die Wegstreckenformel für den zweiten Wanderer am Beispiel $x = 8$ illustriert. Wie weit geht er an 8 Tagen? 1+2+3+4+5+6+7+8 Meilen. Jetzt vertauscht man die Summanden: erster, letzter, zweiter, vorletzter, dritter, drittletzter etc. und fasst sie zu Paaren zusammen: (1+8)+(2+7)+(3+6)+(4+5). Jedes Summandenpaar hat den Wert 9, und es gibt 5 Summandenpaare. Die allgemeine Formel für eine sog. arithmetische Reihe heißt also: Erster plus letzter Summand (1+x) mal die halbe Anzahl der Summanden (x/2).

Verfolgungsaufgaben: Hase und Hund 1

„Die Regel wird [ein]begriffen in der Frag: Es lief ein Has gen ein Holz und ein Hund lief ihm hinten nach. Und wenn der Has 12 Sprüng tat, so tat der Hund 15. Und der Has ist vor dem Hund 100 Schritt. Nun ist ein Frag: Wenn der Hund den Hasen erläuft, in wie viel Schritten? …“

(Wagner 1483; Schröder 1988, 113, 223-224)



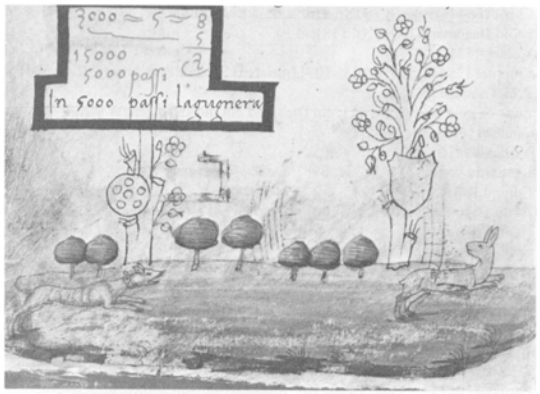
Regel võ hasen.

Die regel wirdet begriffen in der frag. Es lyeff ein has gein holcz vnd eyn wynde lieff im hyndñ nach vnd wen der has 12 sprüng thet so thet der wynde 15 vnd der has ist vor dem wyndẽ 100 schrit Nu ist eyn frag wen der hündt den hasñ erlaufft in wieuil schritt. wildu das wissen so theyl die 100 schritt die der has dem hündt vorlewfft mit der vbertretũg das ist 3 so vindestu 33 ⅓. vnd multiplic mit 15 so vindestu in wieuil schritten der has vber laufft wirdet. ꝛc Der gleychẽ magst du vil ander machen. vnd nach diser richtñ hier vmb võ kürtz wegen das sie auch nicht dienen in das kauffschlagen ist es kürtz geendet. vnd auff das leichtlichst (als oben) begrifft ꝛc

Sprungweite von Hase und Hund wird als gleich angenommen.

3 Schritt näher ≡ 15 Sprünge, also 100 Schritt näher ≡ 100/3 · 15 Sprünge.

Ähnlich: „Sit quidam venator …“ (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 33; p. 37).



(Tropfke 597 [F. Calandri 1491, 92v])

Verfolgungsaufgaben: Hase und Hund 2

¶ Item ein hundt laufft einẽ Hasen nach/ vnd der Haß hat 30 sprüng beuor. Vnd alß offt d Haß 6 sprüng thut/ thut der hundt 8 sprüng/ Ist die Frage in wie viel sprüngen ereylt der hund den hasen. Subtra. 6 von 8/ bleiben 2. Sprich 2 werden einbracht von 8/ von wie vielen werden 30 einbracht. Facit 120. In so viel sprüngen ereylt der hundt den Hasen.

¶ Item ein hundt laufft einẽ Hasen nach/ der Haß hat 50 sprüng beuor. Vñ alß offt der Haß 4 sprüng thut/ thut der hundt nit mehr alß 3. Vnd 2 hunds sprüng thuen alß viel alß 3 Hasen sprüng. Ist die frag in wie viel sprüngen ereylt der hundt den Hasen. Sprich 2 Hunds sprüng gebenn 3 Hasenn sprünge/ wie viel geben 3 hunds sprünge. Facit 4 ½. Sprich ½ Hasen sprung wird von 3 hunds sprüngen einbracht/ von wie viel werden 50 sprüng einbracht. Facit in 300 sprüngen.

(Apian 1527, N1-1v)

Verfolgungsaufgaben: Hase und Hund in einem einfacheren Gewand

„Item. Ein Bote geht alle Tage 7 Meilen wegs und ist schon 64 Meilen gangen. So will sein Herr noch einen Boten hinach schicken, der gehet alle Tage 9 Meilen. Ist die Frage: In wie viel Tagen ereilt er den ersten Boten? Mach’s also: Subtrahir 7 von 9 bleiben 2, dividir 64 in 2. Facit 32 Tage, daran erholt der ander den ersten.“

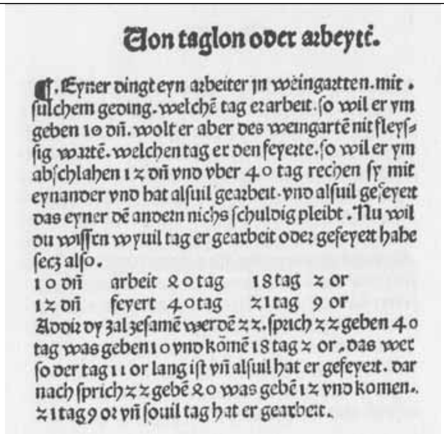
(Apian 1527, M 8v)

¶ Item ein bot geht alle tage 7 meylwegs vnd ist schon 64 meilen gangen/ so wil sein Herr noch einen boten hinach schicken/ der gehet alle tage 9 maylen Ist die frage in wie vil tagen ereylt er den ersten boten. Machs also subtrahir 7 vonn 9 bleiben 2/ diuidir 64 in 2 Facit 32 tage daran erholt der ander den ersten.

Von Tagelohn oder Arbeit 1

„Einer dingt einen Arbeiter im Weingarten mit solchem Geding: Welchen Tag er arbeitet, so will er ihm geben 10 dn [denarii, Pfennige]. Wollte er aber den Weingarten nicht fleißig warten, welchen Tag er dann feierte, so will er ihm abziehen 12 dn. Und über 40 Tage rechnen sie miteinander, und hat so viel gearbeitet und soviel gefeiert, dass einer dem anderen nichts schuldig bleibt. Nun willst du wissen, wie viele Tage er gearbeitet oder gefeiert hat.“

(Wagner 1483; Schröder 1988, 98, 216)



Von taglon oder arbeytẽ.

¶.Eyner dingt eyn arbeiter yn weingarten.mit . sulchem geding.welchẽ tag er arbeit.so wil er ym geben 10 dñ.wolt er aber des weingartẽ nit fleys- sig wartẽ.welchen tag er den feyerte.so wil er ym abschlahen 12 dñ vnd vber 40 tag rechen sy mit eynander vnd hat alsuil gearbeit.vnd alsuil gefeyert das eyner dẽ andern nichs schuldig pleibt .Nu wil du wissen wyuil tag er gearbeit oder gefeyert habe secz also.

10 dñ	arbeit	20 tag	18 tag	2 or
12 dñ	feyert	40 tag	21 tag	9 or

Addir dy zal zesamẽ werdẽ 22.sprich 22 geben 40 tag was geben 10 vnd kõmẽ 18 tag 2 or.das wer so der tag 11 or lang ist vñ alsuil hat er gefeyert. dar nach sprich 22 gebẽ 20 was gebẽ 12 vnd komen. 21 tag 9 or vñ souil tag hat er gearbeit.

Ebenso: „Einer dingt ein Arbeiter in einem Weingarten mit solchem Geding …“ (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 183; p. 86; Clm 14908, 100v).

Der Arbeiter habe x Tage gearbeitet und 40–x Tage gefeiert. Für die gearbeiteten Tage bekommt er 10x Pfennige, für die gefeierten verliert er 12(40–x). Lohn minus Verlust soll 0 ergeben, also 10x + 12x – 480 = 0 und daraus x = 480/22 = 240/11 = 21 9/11. Bei der im Text angegebenen Arbeitszeit von 11 Stunden pro Tag hat der Arbeiter also 21 Tage 9 Stunden gearbeitet und 18 Tage 2 Stunden gefeiert.

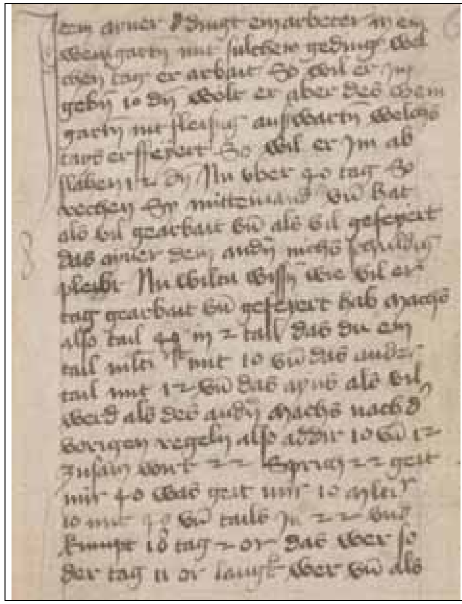
Die Lösung im AR teilt die 40 Tage im Verhältnis von Tagelohn 10 dn und Tagesabzug 12 dn. Dazu werden die 40 Tage in 10 + 12 = 22 Teile zerlegt.

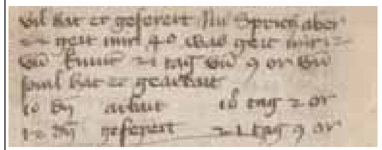
Taglohn ~ 1/Zeit (umgekehrt proportional)

Der zum – kleineren – Lohn gehörige Zeitanteil muss größer sein und entspricht 12 Teilen:
12 · 40/22 = 240/11 = 21 9/11.

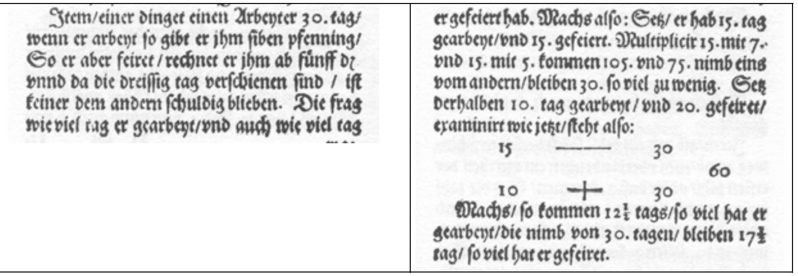
Der zum – größeren – Abzug gehörige Zeitanteil muss kleiner sein und entspricht 10 Teilen:
10 · 40/22 = 200/11 = 18 2/11.

Von Tagelohn oder Arbeit 2





(Ars arithmetica ~ 1480; Vind. 3029, 66-66v)



Item/einer dinget einen Arbeyter 30.tag/ wenn er arbeyt so gibt er jhm siben pfenning/ So er aber feiret/rechnet er jhm ab fünff d; vnnd da die dreissig tag verschienen sind / ist keiner dem andern schuldig blieben. Die frag wie viel tag er gearbeyt/vnd auch wie viel tag er gefeiert hab. Machs also: Setz/ er hab 15. tag gearbeyt/vnd 15. gefeiert. Multiplicir 15. mit 7. vnd 15. mit 5. kommen 105. vnd 75. nimb eins vom andern/bleiben 30. so viel zu wenig. Setz derhalben 10. tag gearbeyt/vnd 20. gefeiret/ examinirt wie jetzt/steht also:

15 —— 30

60

10 ┼ 30

Machs/ so kommen 12½ tags/so viel hat er gearbeyt/die nimb von 30. tagen/ bleiben 17½ tag/ so viel hat er gefeiret.

(Ries 1574, 60v-61)

Ähnlich: „Ein Bürger zu Leipzig will ein Haus bauen und dingt mit den Arbeitern also …“ (Widmann 1489, 142v-143v; Gärtner 2000, Nr. 234, p. 451).

Mischungsaufgaben, Legierungen: Münzschlag, Reinheit

„Exempel von Pagament und Schickung des
Tiegels auf Silber und Gold

Item. Einer hat zweierlei gekornt Silber.
Des ersten hält 1 Mark 9 Lot fein. Des an-
dern 1 Mark 14 [nicht 13] Lot. Daraus will er mischen
ein Werk, das soll haben 20 Mark, und 1 Mark
soll bestehen auf 11 Lot …“.

(Apian 1527, K 1)

Lösung:

x Mark 9-lotiges und 20–x Mark 14-lotiges Silber sollen 20 Mark 11-lotiges ergeben.

$x \cdot 9 + (20–x) \cdot 14 = 20 \cdot 11$

$9x + 280 – 14x = 220$

$5x = 60 \quad \rightarrow x = 12$ [Mark]

$y = 8$ [Mark]

Wein panschen

„23 Maß Wein, 1 Maß pro 5 pf, und ich will ihn ausgeben 1 Maß pro 3 pf … Willtu nun wissen, wie viel Wasser darein sollt tuen, dass du 1 Maß pro 3 pf mögst geben, dic sic …“ (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 59, p. 46) Lösung: 15 1/3 Maß.

Mischungsaufgaben, Legierungen: Die zerbrochene Glocke 1 (Dreisatz)

„Es ist ein Glocken und ist gemacht von Gold (50), Silber (60) und Glockspeis [Gussmaterial] (100) und wiegt jegliches als da steht. Die Glock wiegt miteinander 210 lb, und dieselb Glock zerbricht und fehlt ein Stück davon, das hat 100 lb. Nun will ich wissen, wie viel Golds und Silber und Glockspeis darin sein. Das mach als ein Gesellschaft …“

(AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 194, p. 90)

Bei Apian ist die Legierung komplizierter:

„Es zerfällt die Glock und
bricht in etliche Stück. Der Meister nimmt
ein Stück, helt 1 ct 36 lb, will daraus eine klei-
ne Glocken gießen und will die nach rech-
ten Würden der zugelegten Metall verkaufen.
Darum wollt er gerne wissen, wie viel ei-
nes jeglichen Metalls in diesem Stück sei …“

(Apian 1527, H 7v)

Lösung:

Gesamtgewicht der Glocke bestimmen, dann Dreisatz.

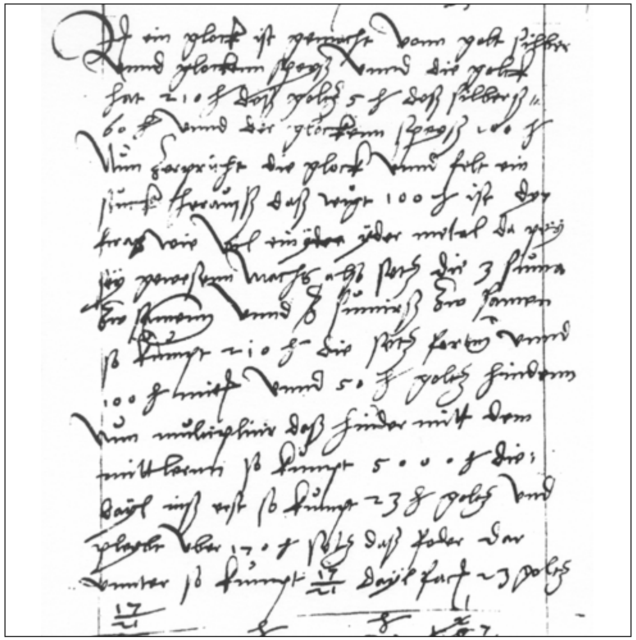
Gesamtgewicht: 458 + 212 + 164 + 40 + 230 + 20 = 1124 [lb].

Mischungsaufgaben, Legierungen: Die zerbrochene Glocke 2 (Dreisatz)

Mit den gleichen Zahlenwerten wie im AR:

„Item. Ein Glock ist gemacht von Gold, Silber
und Glockenspeis. Und die Glock
hat 210 lb, des Golds 5[0] lb, des Silbers
60 lb und der Glockenspeis 100 lb.
Nun zerbricht die Glock und fällt ein
Stück heraus, das wiegt 100 lb. Ist die
Frag, wie viel ein jedes Metall dabei
sei gewesen. Mach's also: Setz die 3 Summa
zusammen und summier's zusammen,
so kommt 210 lb. Die setz vorn und
100 lb [als] Mittleres und 50 lb Golds hinten.
Nun multiplizier das Hintere mit dem
Mittleren, so kommt 5000 lb. Die
teil ins Rest, so kommt 23 lb Golds und
bleibt über 170 lb. Setz das Vordere dar-
unter, so kommt 17/21 Teil. Facit 23 Golds
17/21."

(Weltzell 1523; UB München 4° Cod. ms. 718, 85v)

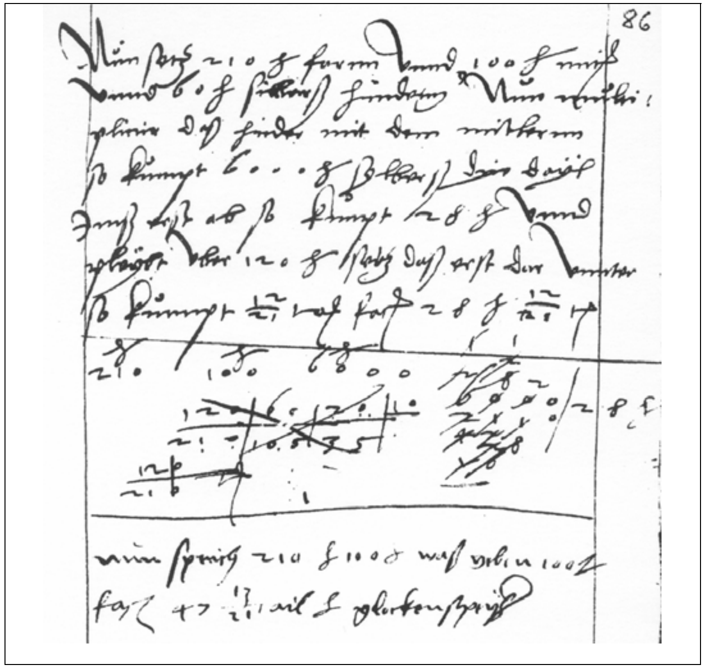


Mischungsaufgaben, Legierungen: Die zerbrochene Glocke 3 (Dreisatz)

„Nun setz 210 lb vorn und 100 lb [als] Mittleres
und 60 lb Silbers hinten. Nun multi-
plizier das Hintere mit dem Mittleren,
so kommt 6000 lb Silbers. Die teil
ins Rest ab, so kommt 28 lb und
bleibt über 120 lb. Setz das erste darunter,
so kommt 12/21. Facit 28 lb 12/21.

Nun sprich: 210 lb, 100 lb was geben 100 lb?
Facit 47 13/21 Teil lb Glockenspeis."

(Weltzell 1523; UB München 4° Cod. ms. 718, 86)



Rechenweg:

Gold:	210 : 100 = 50 : x → x = 5000/210 = 500/21 = 23 17/21
Silber:	210 : 100 = 60 : x → x = 6000/210 = 600/21 = 28 12/21
Glockenspeis:	210 : 100 = 100 : x → x = 10000/210 = 47 13/21

Gesellschaftsrechnung 1 (Dreisatz, Regula de tre / tri, Regula aurea)

Beispiele für mittelalterliche Zusammenschlüsse von Kaufleuten, so wie wir heute von Wirtschafts-, Kapital- und Handelsgesellschaften in verschiedenen juristischen Formen sprechen, finden sich häufig. Unter „Hauptgut" wird eine Einlage oder ein Einsatz verstanden, ein Geldbetrag, der in eine Gesellschaft eingesetzt wird. Höhe und Dauer der Einlagen können innerhalb derselben Gesellschaft differieren, so dass bei Beendigung der Gesellschaft Gewinn und Verlust genau auf die Gesellschafter verteilt werden müssen. Im folgenden Beispiel ist die Währung der Florentiner Gulden.

„Item. Es sind drei Gesellen, machen eine Gesellschaft. Der erst legt 30 flor., der ander 65 flor., der dritt 70 flor. und haben gewonnen 100 flor. Was steht nun einem jeden zu?

Mach's also: Nimm das Hauptgut von allen drein und tue zusammen [addiere], macht 165 flor. Nun mach's also: 165 flor. [Einlage] gibt mir 100 flor. Gewinns. Was gibt mir 30 flor. [Einlage] gesondert? Nun setz es also in die Regel 165 100 30 etc."

(Linienrechenbuch, Rott am Inn ~1460; Clm 15558, 197r; Vogel 1973, 43-44)

Gemeint ist der schon im Mittelalter weit verbreitete Dreisatz (Regula de tri, Regula ternaria, goldene Regel, Verhältnisrechnung), deren Anwendung die Gleichung 165 : 100 = 30 : x mit dem Ergebnis x = 18 30/165 liefert. Der erste Gesellschafter macht mit einem Einsatz von 30 Gulden demnach einen Gewinn von 18 30/165 Gulden.

Ähnliche Aufgaben im AR (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 169, 192, 193, 194).

Ähnlich mit 65 fl Hauptgut (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 193, p. 90 = Wagner 1483, 30; Schröder 1988, 65-66, 198).

(Ries 1574, 52)

Gesellschaftsrechnung 2 (Dreisatz)

„Männiglich soll merken Rechnung von Gesell-
schaft, die hernach [ein]begriffen sind, wenn da-
durch manchen, [dem] zu kurz geschehen, [vor] Schaden bewahren
mag. Es sind drei Kaufmann, die machen ein Gesell-
schaft. Der erst legt 300 fl, der ander 340, der dritt 270. Nun
willtu wissen, wenn sie gewonnen haben 210 fl, was jeg-
lichem zu seinem Teil gebührt …"

(Wagner 1483, 29; Schröder 1988, 63-64, 196-197)

Von gesellschafft. Das .13. Capitel.

MEniglich sol mercken rechnung von gesel
schaft die hernach begriffen sind. wañ da-
durch manchen zukurtz gescheen. schadē bewaren
mag. Es sind drey kauffmā die machen ein gesel-
schaft. der erst legt 300 fl. d anď 340. d drit 270. Nu
wiltu wissen weñ sy gewūnē habē 210 fl was yg
lichem zu seinē teyl gebürd setz also hernach.

300 fl		69 fl	4 ß	7 h	4/13	
340	210 fl	78	9	2	10/13	
270		62	6	1	11/13.	

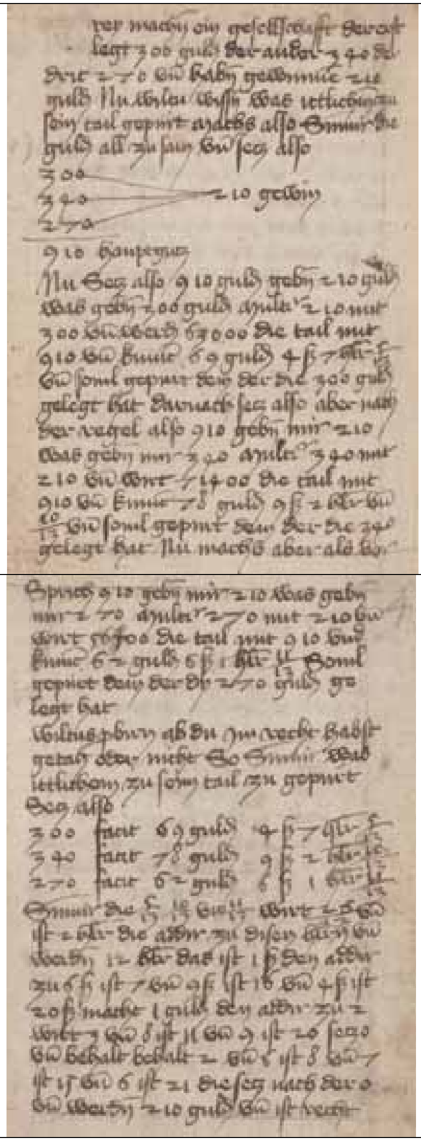
910. Sūmir die guldē all zusamē werdē so vil 910.
Sprich 910 fl haubtguts gebē 210 fl gewins was
gebē 300 fl haubtguts. Multiplicir 300 mit 210
werdē 63000. die teile in 910. vñ komē 69 fl 4 ß
7 h 4/13 vñ also vil gepürt dē der 300 fl gelegt hat. Dar
nach setz also. 910 fl gebē 210 was gebē 340. vnd
komen 78 fl 9 ß 2 h 10/13 vnd so vil gepürt dem d 340
fl gelegt hat. Nu secz aber 910 geben 210 fl was
gebn 270 vnd komen 62 fl 6 ß 1 h 11/13 vnd also vil ge
pürt dem der 270 fl gelegt hat etc.
Wiltu sölchs pbirē so sūmir was yglichem zu sei
nem teyl gepürt vñ addir zū ersten das gebrochñ 4/13
10/13. 11/13 zu samen werdē 26/13 das ist 2 h die addir zu dysē
hlrn werdē 12 hl macht 1 ß den addir zu dē ādern ß
vnd komē 20 ß ist 1 fl den addir zu dē guldē komē
denn 210 fl so ist es recht. desgleich mach alle anď
geselschafft vnd pbirs etc.
Wer ab in gebrochē geübt ist d mach sein prob also
teyl den gewin in die gancʒē sum als teyl 210 fl in
910 werdē 210/910 das mach zū minstē vñ werdē 3/13.
Nu mult. yglichs haubtgut mit dē zeler vñ teyls
in nēner vñ sol gleich komē als obē stet

(= AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 192, p. 89-90)
(= Widmann 1489, 183; Gärtner 2000, Nr. 302, p. 478)
(= Ars arithmetica ~ 1480; Vind. 3029, 47v)

910 fl Hauptgut liefern 210 fl Gewinn, also 210/910 fl je fl Hauptgut.

Umrechnungen: 1fl = 20 Schilling, 1 Schilling = 12 Heller.

Gesellschaftsrechnung 3 (Dreisatz)

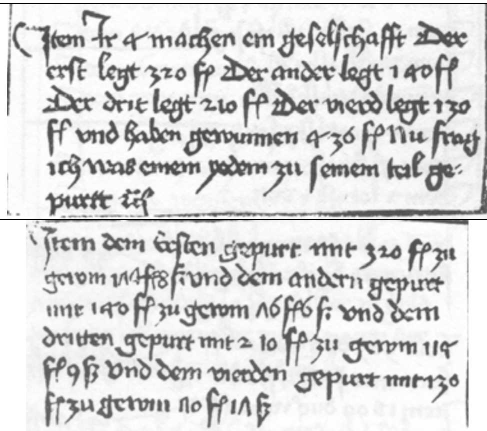


(Ars arithmetica ~ 1480; Vind. 3029, 47v-48 (= AR Nr. 192))

Gesellschaftsrechnung 4 (Dreisatz)

„Item. Ihr 4 machen ein Gesellschaft. Der erst legt 320 fl. Der ander legt 140 fl. Der dritt legt 210 fl. Der viert legt 130 fl und haben gewonnen 436 fl. Nu frag ich, was einem jeden zu seinem Teil gebührt etc.
Item. Dem ersten gebührt mit 320 fl zu Gewinn 174 fl 8 ß [Schilling] und dem andern gebührt mit 140 fl zu Gewinn 76 fl 6 ß und dem dritten gebührt mit 210 fl zu Gewinn 114 fl 9 ß und dem vierten gebührt mit 130 fl zu Gewinn 70 fl 17 ß.“

(Bamberger Blockbuch, 12-12v; Vogel 1980, 29-30)



Gesamtes Hauptgut: 320 fl + 140 fl + 210 fl + 130 fl = 800 fl

Gewinn je fl: 436 fl / 800 = 0,545 fl

Gewinn des ersten: 0,545 · 320 fl = 174,4 fl = 174 fl 8 ß [1 fl = 20 ß]

Gewinn des zweiten: 0,545 · 140 fl = 76,3 fl = 76 fl 6 ß

Gewinn des dritten: 0,545 · 210 fl = 114,45 fl = 114 fl 9 ß

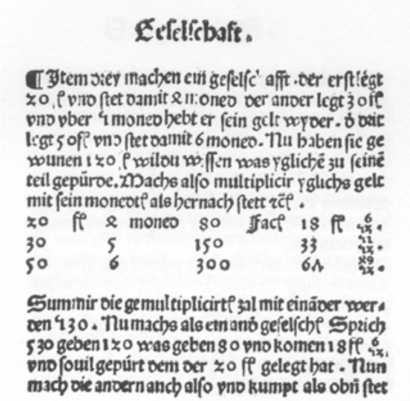
Gewinn des vierten: 0,545 · 130 fl = 70,85 fl = 70 fl 17 ß

Gesellschaft auf Zeit 1 (Dreisatz, Zinsformel)

Unterschiedliche Einlagedauern können die Rechnung komplizieren:

„Item. Drei machen ein Gesellschaft. Der erst legt
20 fl und steht damit 4 Monat Der ander legt 30 fl
und über 5 Monat hebt er sein Geld wieder. Der dritt
legt 50 fl und steht damit 6 Monat. Nun haben sie ge-
wonnen 120 fl. Willdu wissen, was jeglichem zu seinem
Teil gebührte, mach's also: …"

(Wagner 1483; Schröder 1988, 67, 198-199).


Gesellschaft.

Item drey machen ein geselschafft. der erst legt
20 fl vnd stet damit 4 moned der ander legt 30 fl
vnd vber 5 moned hebt er sein gelt wyder. d drit
legt 50 fl vnd stet damit 6 moned. Nu haben sie ge
wunnen 120 fl wildu wissen was ygliche zu seine
teil gepürde. Machs also multiplicir yglichs gelt
mit sein monedt als hernach stett etc.

20	fl	4	moned	80	Fac	18 fl	6/53.
30		5		150		33	51/53.
50		6		300		67	49/53.

Summir die gemultiplicirt zal mit einander wer-
den 530. Nu machs als ein and gesellschft Sprich
530 geben 120 was geben 80 vnd komen 18 fl 6/53,
vnd souil gepürt dem der 20 fl gelegt hat. Nun
mach die andern auch also vnd kumpt als obñ stet

Lösung: $(K_1t_1 + K_2t_2 + K_3t_3)\, p = Z$

bzw. ohne Proportionalitätsfaktor p: $K_1t_1 + K_2t_2 + K_3t_3 \equiv Z$.

$K_1t_1 + K_2t_2 + K_3t_3 = 20 \cdot 4 + 30 \cdot 5 + 50 \cdot 6 = 80 + 150 + 300 = 530$

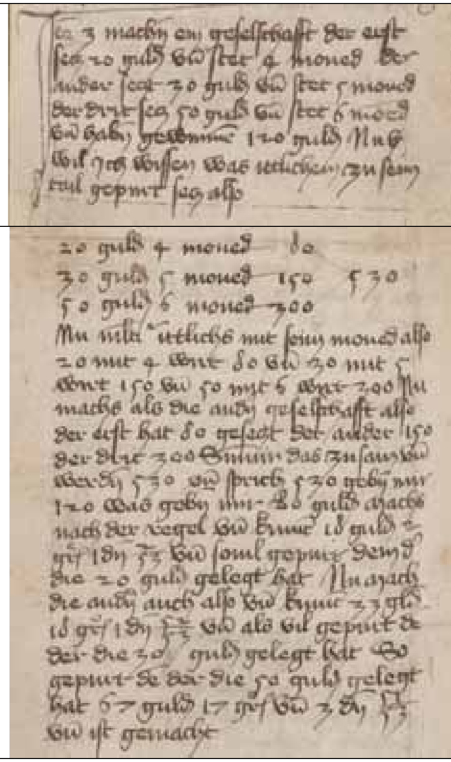
Gewinn von einem fl in einem Monat: 120/530 fl

Gewinn von 20 fl in 4 Monaten: $120/530 \cdot 20 \cdot 4$ fl = 960/53 fl = 18 6/53 fl

Gewinn von 30 fl in 5 Monaten: $120/530 \cdot 30 \cdot 5$ fl = 1800/53 fl = 33 51/53 fl

Gewinn von 50 fl in 6 Monaten: $120/530 \cdot 50 \cdot 6$ fl = 3600/53 fl = 67 49/53 fl

Gesellschaft auf Zeit 2 (Dreisatz, Zinsformel)



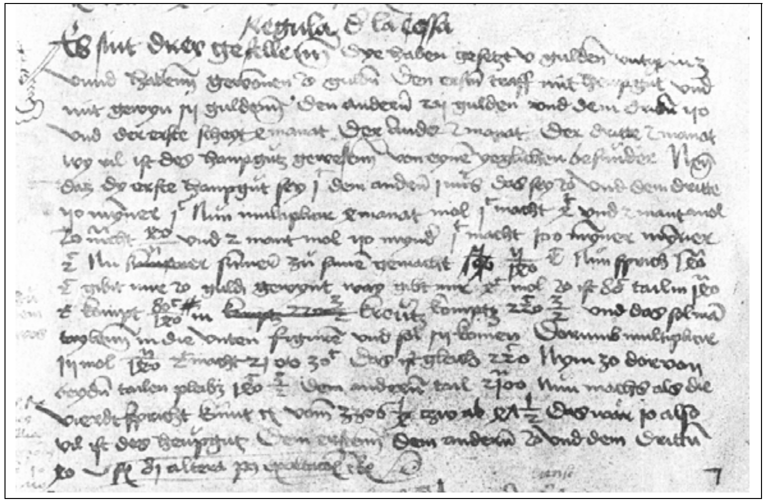
(Ars arithmetica ~ 1480; Vind. 3029, 50-50v)

Gesellschaft auf Zeit 3 (Regula de la cosa)

cosa it. ‘Ding’; Bezeichnung für eine Unbekannte, abgekürzt c oder ∂, heute x.

„Regula de la cossa
Es sind drei Gesellen, die haben gesetzt 70 Gulden unter ihnen 3
und haben gewonnen 20 Gulden. Den ersten traf mit Hauptgut und
mit Gewinn 15 Gulden, den andern 25 Gulden und den dritten 50.
Und der erste scheyt [setzt] 4 Manat, der ander 2 Manat, der dritte 2 Manat.
[Heute würde man etwa ergänzen: Dem andern seien 20 Gulden Hauptguts.]
Wie viel ist des Hauptguts gewesen von einem jeden gesondert? Nenn,
dass die erste Hauptgut sey 1^c, dem anderen 1 Numerus, das sei 20 [wird beliebig angenommen!], und dem dritten
50 [70 – 20] minder [minus] 1^c. Nun multiplicir 4 Manat mol 1^c, macht 4^c, und 2 Manat mol
20, macht 40|N, und 2 Manat mol 50 minder 1^c, macht 100 minder 2^c …“

(Erste deutsche Algebra, 1481; Dresden C 80, 378v; Vogel 1981, 43 und 16-17)



(= AR Clm 14908, 156v, lt. Vogel 1981, 43; nicht ediert)

Aus „20 fl gewinnen 5 fl auf 2 Monate“ folgt:

Gewinn von 1 fl pro Monat: 2,5 fl/ 20 = 1/8 fl

$Z = Kpt / 100 \rightarrow (K_1t_1 + K_2t_2 + K_3t_3)\ p = Z$

$(4x + 40 + 100 – 2x) \cdot 1/8 = 20$

Lösung: Einsätze x = 10 fl; 20 fl; 40 fl.

Unerwartete Zwillingserbschaft 1 (Dreisatz, zu Gesellschaftsrechnung)

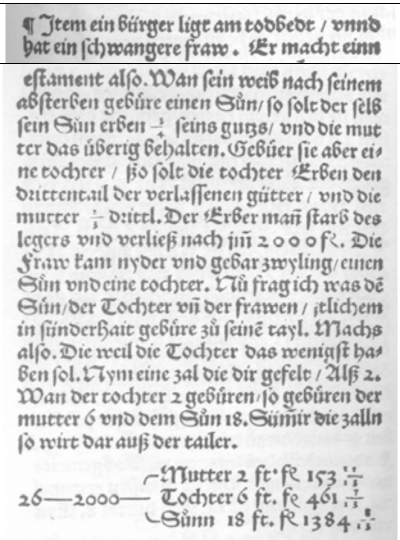
„Mach mir die Rechnung: Ein guter Mann will sterben und hinterlässt eine tragende Frau und spricht zu ihr: Dass du hast eine Tochter, ein weybes pildd (Weibsbild), so gebe ich ihr 2 Teile, und behalt dir 3 Teile für dich. Ist aber, dass du hast einen Sohn, einen Knaben, so gebe ich dem 3 Teile, und halt die 2 Teile für dich. Und er stirbt. Nun hatte die Frau einen Sohn und eine Tochter. Nun fraget ihr, in welcher Weise man soll die Ding teilen.“

(Erste deutsche Algebra, 1481; Dresden C 80, 378r; Vogel 1981, 41-42)

Die Lösung wird im Text detailliert und nachvollziehbar dargestellt, soll aber hier etwas moderner formuliert werden. Sei x der Anteil der Mutter, dann bekommt die Tochter 2/3 x, der Sohn 3/2 x. Das aufsummiert zu 19/6 x ist den 5 Teilen des Vermögens gleichzusetzen, so dass sich der Anteil der Mutter auf 30/19 = 1 11/19 beläuft.

(Tropfke 657 [Paolo Dagomari (1281-1374), 86])

Unerwartete Zwillingserbschaft 2 (Dreisatz)


¶ Item ein bürger ligt am todbedt / vnnd
hat ein schwangere fraw. Er macht einn
estament also. Wan sein weib nach seinem
absterben gebüre einen Sün / so solt der selb
sein Sün erben $\frac{3}{4}$ seins gutzs / vnd die mut
ter das überig behalten. Gebüer sie aber ei-
ne tochter / ßo solt die tochter Erben den
drittentail der verlassenen gütter / vnd die
mutter $\frac{2}{3}$ drittl. Der Erber mañ starb des
legers vnd verließ nach jm 2000 fl. Die
Fraw kam nyder vnd gebar zwyling / einen
Sün vnd eine tochter. Nü frag ich was dẽ
Sün / der Tochter vñ der frawen / jtlichem
in sünderhait gebüre zü seinẽ tayl. Machs
also. Die weil die Tochter das wenigst ha-
ben sol. Nym eine zal die dir gefelt / Alß 2.
Wan der tochter 2 gebüren / so gebüren der
mutter 6 vnd dem Sün 18. Sümir die zalln
so wirt dar auß der tailer.

Mutter 2 ft. fl 153 $\frac{11}{13}$
26 — 2000 — Tochter 6 ft. fl 461 $\frac{7}{13}$
Sünn 18 ft. fl 1384 $\frac{8}{13}$

(Apian 1527, H 5-5v)

Unerwartete Drillingserbschaft 1 (Dreisatz)

Die Aufgabe der Zwillingserbschaft gibt es ähnlich mit drei Kindern:

„Item. Ein Mann liegt am Tot[en]bett und hat ein schwan-
ger Frau. Der [hinter]lässt 3000 fl und bestellt sein Geschäft
also: Gebär die Frau ein Sohn, so soll man dem Sohn
2000 fl geben und der Mutter 1000. Gebär sie aber
ein Tochter, so soll man der Mutter 2000 und der Tochter
1000 fl geben. Und also stirbt er. Darnach gebiert die
Frau ein[en] Sohn und zwu [zwei] Töchter. Nun willtu wissen, was
jeglichem gebühr zu seinem Teil, so dass des Vaters Geschäft
vollbracht und sein letzter Will nicht verändert werde …“

(Wagner 1483, 34; Schröder 1988, 73-74, 202-203)


Item ein man ligt am todpett vñ hat ein schwan-
ger frawẽ. der lest 3000 fl vñ bestelt sein gescheffť
also. Gepür die frawe ein sun so sol man dem sun
2000 fl geben. vnd der muter 1000. Gepür sy ab
ein tochter so sol mã der muter 2000 vñ ď tochter
1000 fl geben. vñ also stirbt er. darnah gepirt die
fraw ein sun vñ zwu tochť. Nu wiltu wissen was
yglichẽ gepür zu seinẽ teyl. so das des vaťs gescheffť
volbracht vñ sein letzster wil nicht verẽdert werde

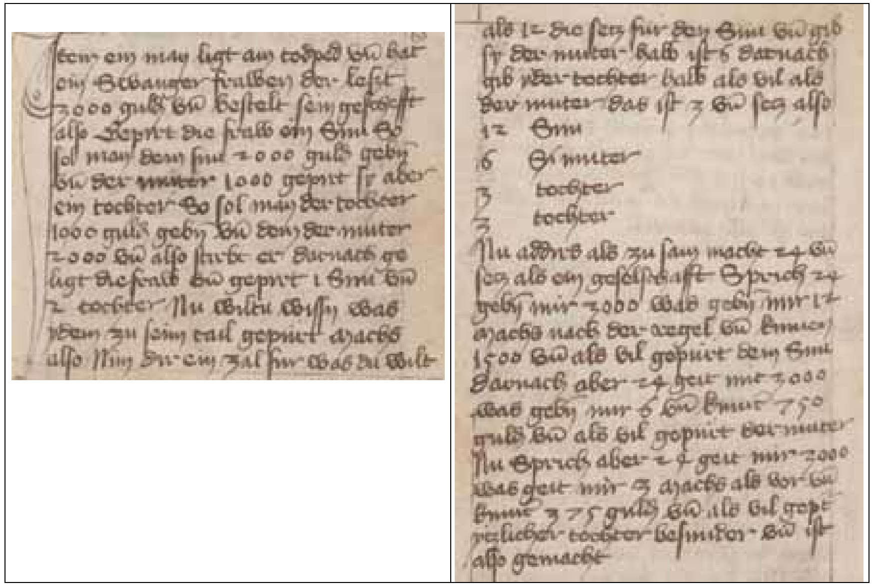
machs also nim dir ein zal für was du wilde als 12
die secz für dẽ sun vñ gib ď muť halb souil vñ yglich
er tochť halb souil als der muter.
12 dem sun 1500 fl. Nu sumir das alles
6 ď muter 750. vñ sprich 24 gebẽ 3000
3 ď tochť 375. fl was gebẽ 12 vñ ko-
3 ď tochť 375. mẽ 1500 fl vñ machs
als sich gepürt vñ kümpt yeẽ souil als obẽ stet. Des

Ebenso: „Item. Ein Mann liegt an dem Tot[en]bett. Und hat ein schwangere Frau, der lässt er 3000 fl und bestellt seinen letzten Willen also: Gebiert die Frau ein Sohn, so soll man dem Sohn 2000 fl geben und der Mutter 1000. Gebiert sie aber ein Tochter, so soll man der Mutter 2000 fl geben und der Tochter 1000 Und also stirbt er. Danach gebiert die Frau 1 Sohn und 2 Töchter …“

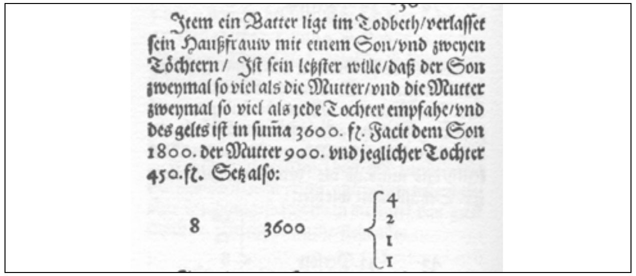
(Widmann 1489, 145v-146; Gärtner 2000, Nr. 238, p. 453)

Ebenso: „Esto quidam in agone uxorem habens …“ (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 209; p. 97)

Unerwartete Drillingserbschaft 2 (Dreisatz)



(Ars arithmetica ~ 1480; Vind. 3029, 55-55v (= AR Nr. 209))



Item ein Vatter ligt im Todbeth/verlasset sein Haußfrauw mit einem Son/vnd zweyen Töchtern/ Ist sein letzster wille/daß der Son zweymal so viel als die Mutter/vnd die Mutter zweymal so viel als jede Tochter empfahe/vnd des gelts ist in sum̃a 3600. fl. Facit dem Son 1800. der Mutter 900. vnd jeglicher Tochter 450. fl. Setz also:

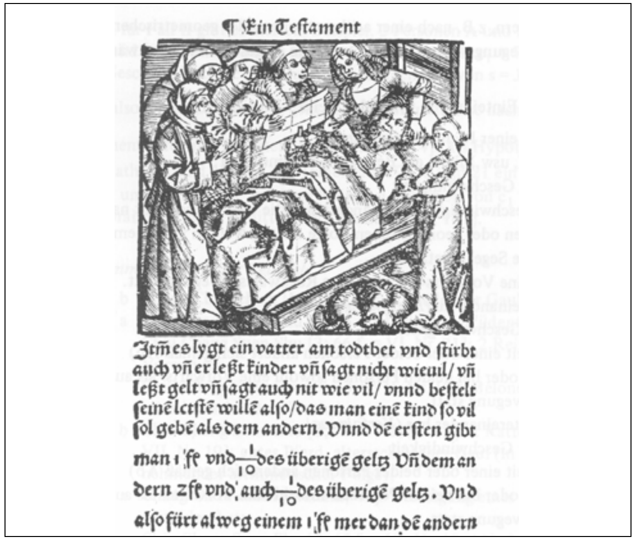
$$8 \qquad 3600 \qquad \begin{cases} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{cases}$$

(Ries 1574, 54v)

Testament bzw. unbekannte Erbschaft

„Es liegt ein Vater am Tot[en]bett und stirbt auch und er [hinter]lässt Kinder und sagt nicht wieviel. Und [hinter]lässt Geld und sagt auch nicht wieviel. Und bestellt seinen letzten Willen also, dass man einem Kind so viel soll geben als dem andern. Und dem ersten gibt man 1 fl und 1/10 des übrigen Gelds. Und dem andern 2 fl und auch 1/10 des übrigen Gelds. Und also fort alweg einem 1 fl mehr denn dem andern und 1/10 des übrigen. Nun ist die Frag, wie viel der Kinder und wie viel der fl gewest sein …“

(Widmann 1489, 145-145v; Gärtner 2000, Nr. 237, p. 452-453)



¶ Ein Testament

Itm̃ es lygt ein vatter am todtbet vnd stirbt auch vñ er leßt kinder vñ sagt nicht wieuil/ vñ leßt gelt vñ sagt auch nit wie vil/ vnnd bestelt seinẽ letstẽ willẽ also/das man einẽ kind so vil sol gebẽ als dem andern. Vnnd dẽ ersten gibt man 1 fl vnd $\frac{1}{10}$ des überigẽ geltz Vñ dem andern 2 fl vnd auch $\frac{1}{10}$ des überigẽ geltz. Vnd also fürt alweg einem 1 fl mer dan dẽ andern

(Tropfke 589 [Widmann (1489) 1508, 97v])

Ebenso: „Ein Mann hat Söhn, und man weiß nicht, wie viel ihr sind, und hat fl liegen in einer Wechselbank, und man weiß auch nicht, wie viel ihr sein. Nun sendt er den ältesten Sohn in die Bank und heißt ihn nehmen voraus 1 fl und das 10-Teil aller fl, die da bleiben …“ (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 114; p. 64).

Ansatz: Das erste Kind bekommt so viel wie das zweite; Vermögen x.

1 + 1/10(x–1) = 2 + 1/10(9/10(x–1) –2)   übrig nach dem ersten: (x–1) – 1/10(x–1)

100 + 10(x–1) = 200 + 10(9/10(x–1) –2)

10x – 10 = 100 + 9x – 9 – 20

x = 100 – 9 – 20 + 10 = 81

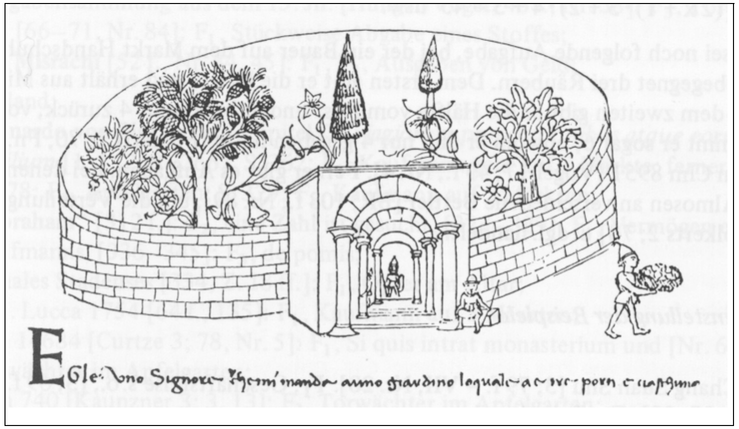
Das erste (bzw. jedes) Kind bekommt 1 + 1/10(81–1) = 9 [fl], also sind es 9 Kinder.

Ähnlich mit Töchtern: „Ein man hat Tochter, und die erst nimmt 1 fl und den 6 Teil als oben …“ (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 115, p. 65).

Von Öpfeln eine besondere Zahl zu brocken 1 (zu unbekannte Erbschaft)

„Es wurde ein Geselle von seiner Buhle [Liebsten]
in einen Baumgarten geschickt, dass er
ihr einen Apfel bringen sollt und nicht mehr. Und
der selbige Garten hatte 3 Tore, und unter jedem
war ein Thorwart [Torwärter] und ein Knecht. Und wann
er wieder aus dem Garten gehen wollte, wie viel er
dann Öpfel in dem Garten gebrochen [gebrockt] hatte, die [davon] soll
er dann dem ersten Torwärter nach Gesetz der Herren
den Halbteil geben und danach von seinem [verbliebenen] Teil
des Torwärters Knecht auch einen Opfel; danach
dem anderen Torwärter soll er [von dem], was er dann noch
Öpfel hat, auch den halben Teil geben und aber
dess[en] Knecht von seinem [verbliebenen] Teil einen Apfel. Des gleichen
soll er dem dritten Torwärter [von] dem überblieben
Teil den Halbteil auch geben und dem Knecht
von seinem Teil auch einen Apfel. Und er soll dann noch
nit mehr denn 1 Apfel haben und den seiner Buhle
bringen, oder die Freundschaft wär aus. Rate,
wie viel muss der Geselle am ersten der Öpfel
brocken? Antwort, er muss 22 Öpfel brocken.“

(Linienrechenbuch, Tegernsee ~1480; Cgm 740, 28v-29r; Kaunzner 1970, 13)



(Tropfke 583 [Paolo Dagomari (1281-1374); D. E. Smith 1908, 438])

Von Öpfeln eine besondere Zahl zu brocken 2


Von Öpflen ein sundere zal ze brechen:-
Es wurde ein geselle von seine püelen
In aine paumgarten geschickt, das er
Ir aine Apfel bringen solt, vnd nit mer, vnd
der selb gartt het. 3. Thor, vnd vnder yetlichem
was ain Thorwart, vnd ain knecht, vnd wan
er wider aus dem gartn gen wolt, wieuil er
dan öpfel In dem gartn gebrochen hette, die soll
er dem dem erstn torwartl nach gesatz der herren
den halbtail geben, vnd darnach von seine tail
des thorwarts knecht auch ain apfl, darnach
dem andern thorwartl sol er was er danocht
öpfel hat auch den halbn tail gebn, vnd aber
dess knecht von seine tail ain apfel, des gleichn
sol er dem dritten thorwartl den vberbeliben
tail den halbtail auch geben, vnd dem knecht
von seine tail auch ain apfel, vnd er soll danacht
nit mer dan 1. apfel haben, vnd den seine bulen
bringen, oder die freundtschafft wer aus, Ratte
wieuil muess der geselle am erstn der öpfel
brechn, Antwort, er muess. 22. öpfel brechn,
vnd hat sonst kain zal mer dan. 14. beleibt
nichts vber, von. 38. beleibt. 3. vber.

(Linienrechenbuch, Tegernsee ~1480; Cgm 740, 28v-29r)

Von Öpfeln eine besondere Zahl zu brocken 2

Der Garten ohne die Buhle findet sich auch bei Widmann (Widmann 1489, 101-101v; Gärtner 2000, Nr. 173, p. 421). Die Aufgabe gibt es ähnlich in dem Gewand, dass einer auf den Markt geht, Geld einsetzt und gewinnt, das wiederholt tut und das Ausgangkapital ermittelt werden soll (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 114, 115, 185, 187, 352).

Die Angabe der Lösung erfolgt im Text ohne weitere Erklärung. Um sie nachzuvollziehen, braucht man eine Gleichung mit einer Unbekannten.

Sei also x die Anzahl Äpfel, die der Gesell pflücken muss.

Am ersten Tor gibt er davon die Hälfte und einen weiteren ab, also $x/2+1$; diese Menge wird mit a abgekürzt.
Es bleiben ihm $x-(x/2+1) = x/2-1 = x/2+1-1-1 = a-2$.

Davon gibt er am zweiten Tor wieder die Hälfte und einen weiteren ab, also $(a-2)/2+1 = a/2$; es verbleiben ihm $a-2-a/2 = a/2-2$.

Davon gibt er am dritten Tor wieder die Hälfte und einen weiteren ab, also
$(a/2-2)/2+1 = a/4$; es verbleiben ihm $a/2-2-a/4 = a/4-2$.

Der verbleibende Rest am dritten Tor muss gleich dem einen Apfel sein, den der Gesell seiner Buhle bringen soll, also $a/4-2 = 1$.

Das liefert $a = 12$. Mit $x/2+1 = a = 12$ erhält man $x = 22$.

Dahinter steckt das allgemeine Prinzip, dass der Gesell am n-ten Tor $a/2^{n-1}$ Äpfel abgibt, die er ggf. mit dem Messer teilen muss, und ihm $a/2^{n-1}-2$ verbleiben.

Der Text erwähnt noch „von 14 bleibt nichts über, von 38 bleibt 3 über".

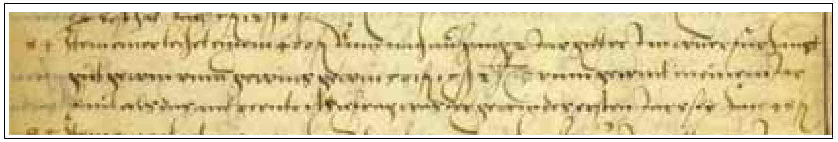
Allgemein bleiben von 14+8k Äpfeln k Äpfel übrig.

Das sieht man, wenn man den verbleibenden Rest am dritten Tor $a/4-2 = k$ setzt.
Das liefert $a = 4k+8$.
Mit $x/2+1 = a = 4k+8$ erhält man $x = 2(4k+7)$.

Zins- und Zinseszins-Rechnung 1

„Item. Einer leiht einem 400 fl und nach Ausgang 2 Jahr gibt er ihm wieder für Haupt-
gut, Gewinn und Gewinns Gewinn 501 fl 15 sch 2 hl 2/5 und gewinnt in einem Jahr so viel als das ander pro rento [?]. Ist die Frag, was der Gewinn des ersten Jahrs sei. Facit 48 fl."

(Neuber; Winckler 1561, Nürnberg Cent. V App. 103, Aufgabe 84)



(Passim im AR)

Diese Aufgabe ist u.a. wegen der Genauigkeit der Zinseszinsrechung (bis auf Bruchteile eines Hellers) interessant. Es ist kein Lösungsweg angegeben.

Währungsumrechnung:

1 fl = 20 sch = 240 hl; 1 sch = 12 hl

Zinseszinsformel für 2 Jahre (H Hauptgut, G Gesamtwert, x Zinssatz)

$(H + Hx) + (H + Hx)x = H (1 + x + x + x^2) = H (1 + x)^2 = G$

$x = \sqrt{(G/H)} - 1$

Gewinn nach dem ersten Jahr: Hx

Umrechnung des Gesamtwertes nach 2 Jahren in Bruchteile von Gulden:

15 sch = 0,75 fl

2 hl 2/5 = 2,4 hl = 1/100 fl

501 fl 15 sch 2 hl 2/5 = 501,76 fl

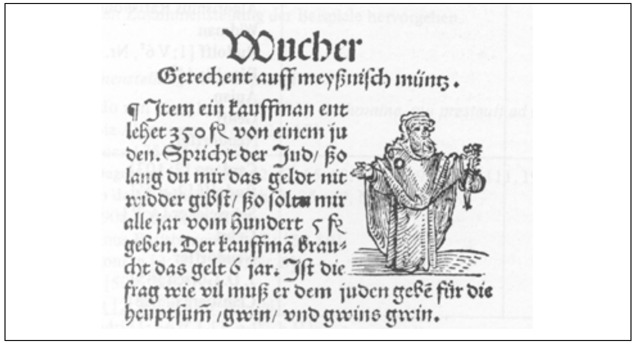
Zinssatz $x = \sqrt{(501{,}76 \text{ fl} / 400 \text{ fl})} - 1 = 22{,}4 / 20 - 1 = 1{,}12 - 1 = 0{,}12 = 12\ \%$

Gewinn nach dem ersten Jahr: $Hx = 400 \text{ fl} \cdot 0{,}12 = 48 \text{ fl}$

Zins- und Zinseszins-Rechnung 2: geometrische Folge

„Item. Ein Kaufmann entleiht 350 fl von einem Juden. Spricht der Jud: «So lang du mir das Geld nicht widergibst, so sollst du mir alle Jahr vom Hundert 5 fl geben.» Der Kaufmann braucht das Geld 6 Jahr. Ist die Frag, wie viel muss er dem Juden geben für die Hauptsumme, Gewinn und Gewinns Gewinn.“

(Apian 1527, L 8)



Wucher
Gerechent auff meyßnisch müntz.
¶ Item ein kauffman entleher 350 fl von einem juden. Spricht der Jud/ so lang du mir das geldt nit widder gibst/ so soltu mir alle jar vom hundert 5 fl geben. Der kauffmā braucht das gelt 6 jar. Ist die frag wie vil muß er dem juden gebē für die heuptsum̄/gwin/ vnd gwins gwin.

Geometrische Folge:

Hauptsumme (HS): $K_0 = 350$

HS + Zins 1. Jahr: $K_1 = 350 + 350 \cdot 0{,}05 = 350 \cdot (1+0{,}05) = K_0\,(1 + p/100)$

HS + Zins(eszins) 2. Jahr: $K_2 = K_1 + K_1 \cdot 0{,}05 = K_1\,(1 + p/100) = K_0\,(1 + p/100)^2$

HS + Zins(eszins) 3. Jahr: $K_3 = K_2 + K_2 \cdot 0{,}05 = K_2\,(1 + p/100) = K_0\,(1 + p/100)^3$

usw.

Zinseszinsformel für das Kapital nach n Jahren bei einem Zinssatz von p %:

$K_n = K_{n-1} + K_{n-1} \cdot p/100 = K_{n-1}\,(1 + p/100) = K_0\,(1 + p/100)^n$

Im vorliegenden Fall: $K_0 = 350$ fl; $p = 5$ %; $n = 6$ Jahre

$(1 + p/100)^6 = (1 + 0{,}05)^6 = (1{,}05^2)^3 = 1{,}1025^3 = 1{,}340095640625 \approx 1{,}34010$

$K_6 = 469{,}03347421875$ fl

Ähnlich: „Ein Jud hat mir geliehen 26 ½ lb Pfennig Regensburger …“ (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 134-135, p. 69)

Entstehung einer Textaufgabe zu Geschwindigkeit, Strecke und Zeit 1

„Anno 1546 am Sonntag den achten Augusti hat
Hänslein Neudorffer ob dem Nachtmahl zu seinem
Vater [Rechenmeister zu Nürnberg] diese Wort gesagt:

«Vatter, 6 Meil ist 5 Jahr, was 1 Eln?»

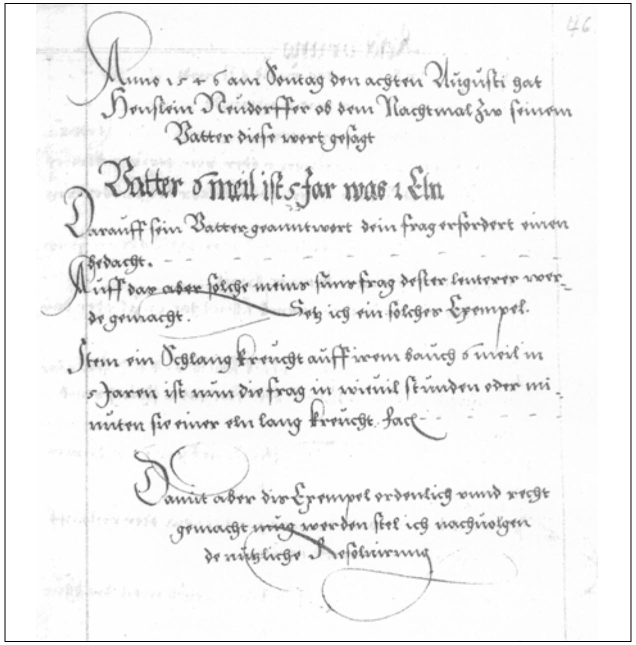
Darauf sein Vater geantwort: «Dein Frag erfordert einen
Bedacht.»

Auf dass aber solche meins Sohns Frag desto leuterer [? lauter = klar] werde gemacht, setz ich ein solches Exempel.

Item. Ein Schlang kreucht auf ihrem Bauch 6 Meil in
5 Jahren. Ist nun die Frag, in wie viel Stunden oder Minuten sie einer Elle lang kreucht. Facit …

Damit aber dies Exempel ordentlich und recht
gemacht mög werden, stell ich nachfolgende nützliche Resolvierung.“

(Behaim; Neudörfer 1547; StaBi Augsburg 4° Cod. 138, 46r)



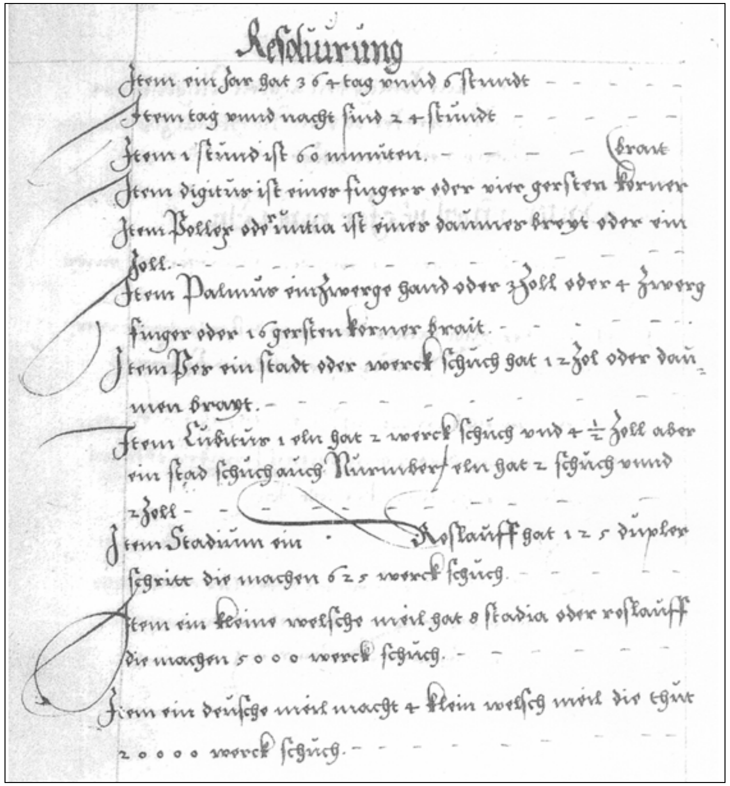
46
Anno 1546 am Sontag den achten Augusti hat
Henslein Neudorffer ob dem Nachtmal zu seinem
Vatter diese wort gesagt
Vatter 6 meil ist 5 jar was 1 Eln
Darauff sein Vatter geantwort dein frag erfordert einen
Bedacht.
Auff das aber solche meins suns frag dester leuterer wer-
de gemacht. Setz ich ein solches Exempel.
Item ein Schlang kreucht auff irem bauch 6 meil in
5 jaren ist nun die frag in wieviel stunden oder mi-
nuten sie einer eln lang kreucht. facit
Damit aber dis Exempel ordenlich vnnd recht
gemacht mög werden stel ich nachvolgen
de nützliche Resolvirung

Entstehung einer Textaufgabe zu Geschwindigkeit, Strecke und Zeit 2

Historische Bemerkung:

Andreas Behaim der Ältere (1530-1612) aus dem bekannten Nürnberger Geschütz- und Glockengießergeschlecht ging 1546-1547 zum Schreib- und Rechenmeister Johann Neudörfer (1497-1563), der in Nürnberg ein Internat unterhielt, in die Ausbildung.

Die nächste Seite der Handschrift (46v) enthält eine Aufstellung der Zusammenhänge von Zeit- und Längenmaßen – mit dem Fehler „1 Jahr hat 364 [sic!] Tag und 6 Stund“. Dann folgt – mit diesem Fehler – die Berechnung der Lösung (47r), die hier in berichtigter Form wiedergegeben ist.



(Behaim; Neudörfer 1547; Augsburg 4° Cod. 138, 46v)

Entstehung einer Textaufgabe zu Geschwindigkeit, Strecke und Zeit 3

Abschließend (47r) folgt die Lösung der Aufgabe:

1 Meile = 20.000 Werkschuh → 6 Meilen = 120.000 Werkschuh

1 Werkschuh = 12 Zoll (Daumenbreite) → 6 Meilen = 1.440.000 Zoll

1 Elle = 2 Werkschuh + 4 ½ Zoll = (2 · 12 + 4 ½) Zoll = 28 ½ Zoll = 57/2 Zoll

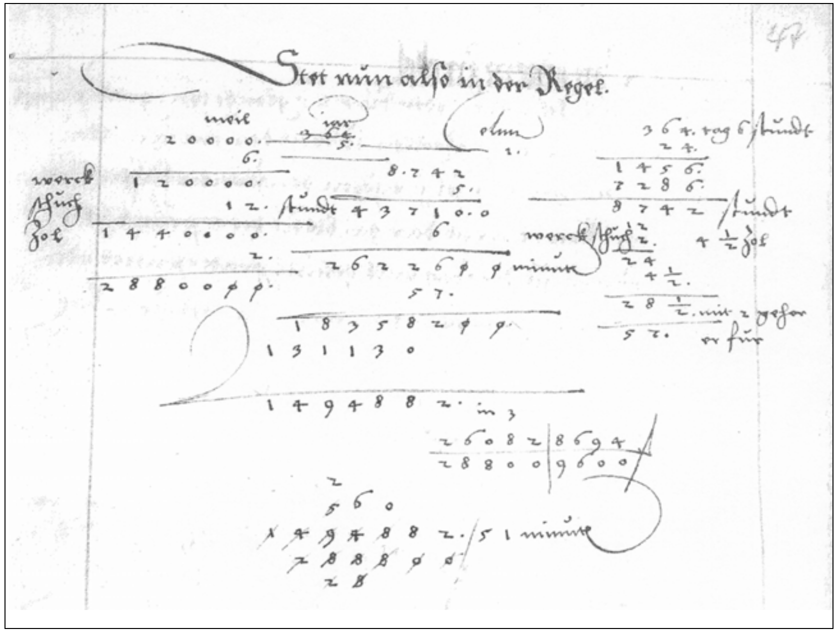
→ 6 Meilen = 1.440.000 / 57/2 Ellen = 2.880.000 / 57 Ellen

1 Jahr ≈ 365 Tage 6 Stunden = 8766 Stunden

5 Jahre ≈ 43.830 Stunden = 2.629.800 Minuten

Jetzt sind Strecken- und Zeitangaben in passende Einheiten umgewandelt, und man kann äquivalent setzen:

2.880.000 / 57 Ellen	≡ 2.629.800 Minuten
2.880.000 Ellen	≡ 149.898.600 Minuten
1 Elle	≡ 149.898.600 / 2.880.000 Minuten ≈ 52 Minuten



(Behaim; Neudörfer 1547; Augsburg 4° Cod. 138, 47r)

Pferdeverkauf über 4 Hufe mit je 8 Nägeln (geometrische Reihe) 1

„Hat einer ein Pferd verkauft nach den Nägeln, der sein 32, und hat geben den ersten Nagel pro 1 Haller, den andern pro 2, den dritten pro 4 et cetera sic progressione ritscha(n)d(o), facit 4 292 967 295 Haller, das macht 3 579 139 lb Regensburger und 33 gr.“

(AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 318; p. 140 = Curtze 1894, 398; ebenso AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 274, p. 125).

Ebenso:

„Ein Ross, das beschlagen ist, das hat
4 Eisen, und ein jedes Eisen hat 8
Nägel, also thundt die 4 Eisen 32
Nägel, und wann einer das Ross verkauft …“

(Linienrechenbuch, Tegernsee ~1480; Cgm 740, 33v; Kaunzner 1970, 15-16)

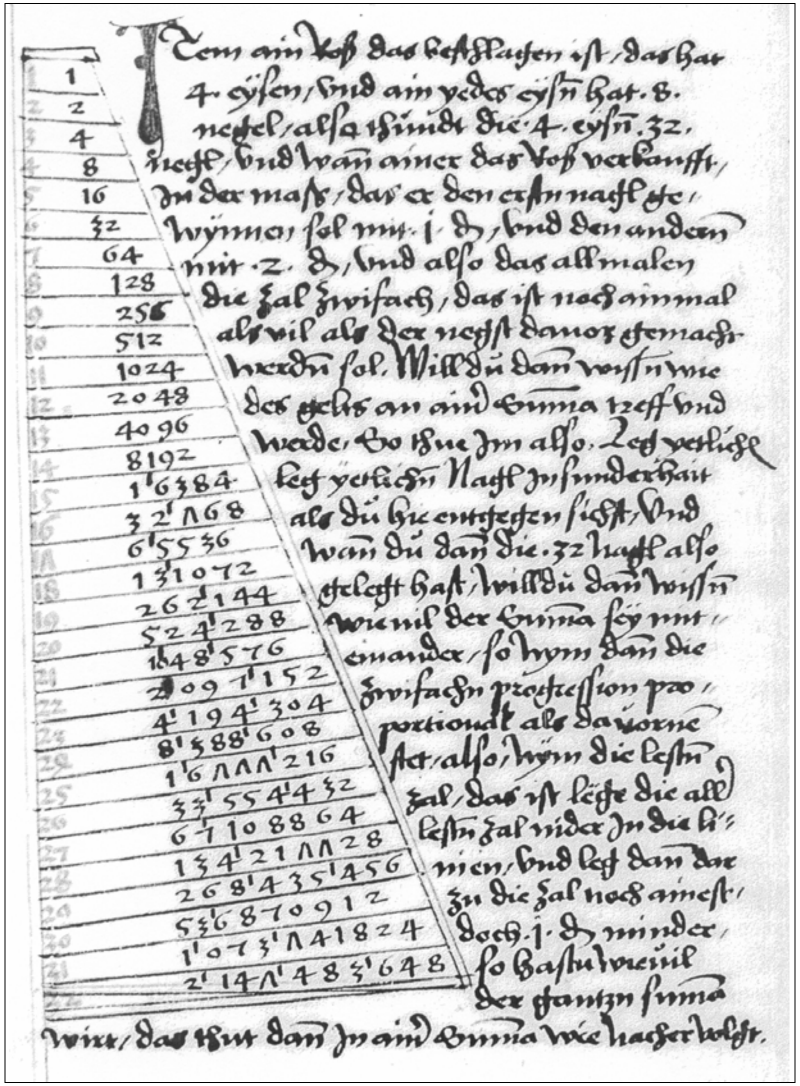
Lösung:

1. Nagel 2^0; 2. Nagel 2^1; 3. Nagel: 2^2; … 32. Nagel: 2^{32-1}.

Geometrische Reihe: $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

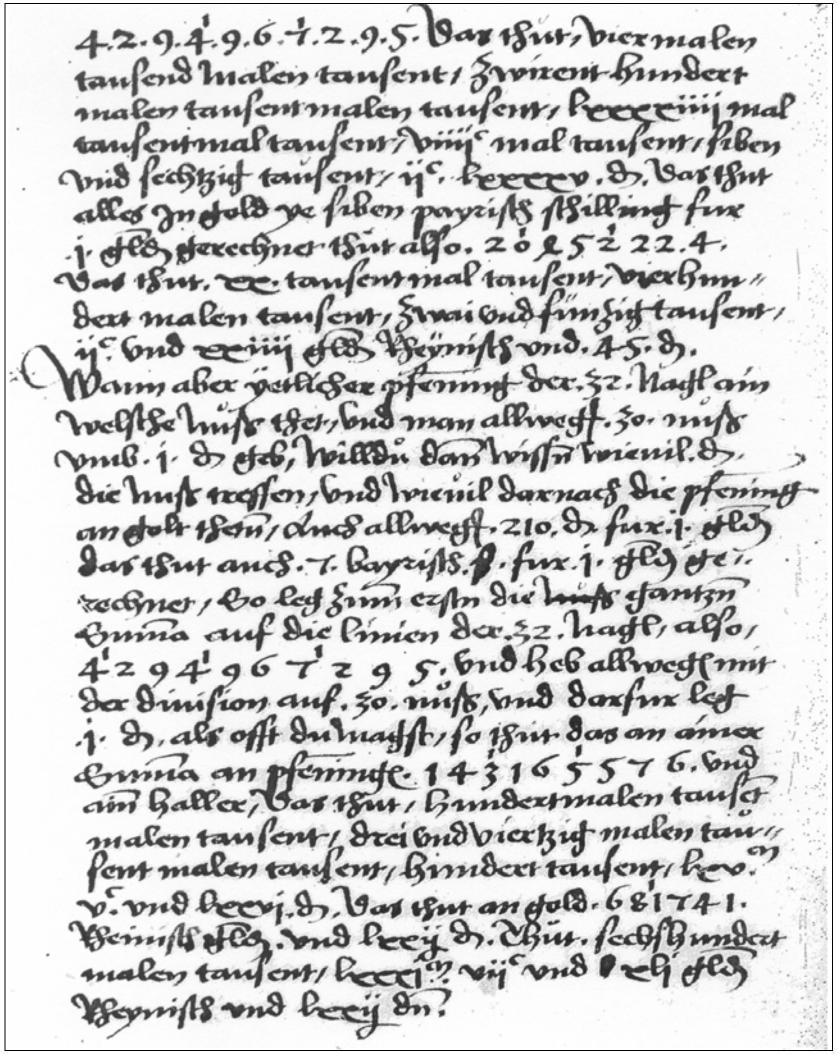
Also $2^0 + \ldots + 2^{32-1} = 2^{32} - 1 = (2^{10})^3 \cdot 2^2 - 1 = 1024^3 \cdot 4 - 1 > (10^3)^3 \cdot 4 > 4 \cdot 10^9$.

Pferdeverkauf über 4 Hufe mit je 8 Nägeln (geometrische Reihe) 2



(Linienrechenbuch, Tegernsee ~1480; Cgm 740, 33v)

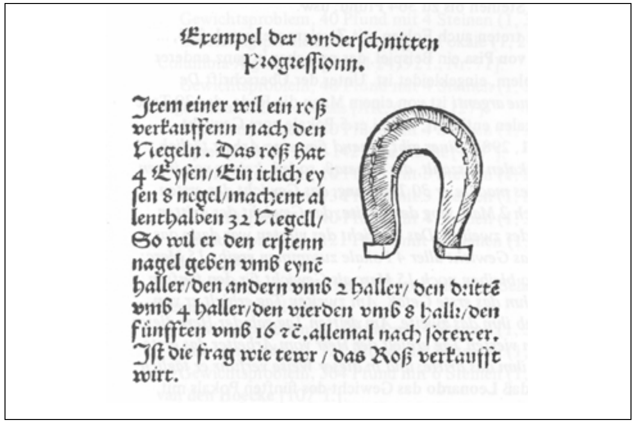
Pferdeverkauf über 4 Hufe mit je 8 Nägeln (geometrische Reihe) 3



(Linienrechenbuch, Tegernsee ~1480; Cgm 740, 34r)

Pferdeverkauf über 4 Hufe mit je 8 Nägeln 2 (geometrische Reihe)

Ebenso: „Item. Einer will ein Ross verkaufen nach den Nägeln. Das Ross hat 4 Eisen, ein jeglich Eisen 8 Nägel, machen allenthalben 32 Nägel. So will er den ersten Nagel geben um einen Heller, den andern um 2 Heller, den dritten um 4 Heller, den vierten um 8 Heller, den fünften um 16 etc. Allemal nach so teuer. Ist die Frag, wie teuer das Ross verkauft wird.“ (Apian 1527, D 7)



Kuhverkauf über 4 Beine mit je 4 Klauen (geometrische Reihe)

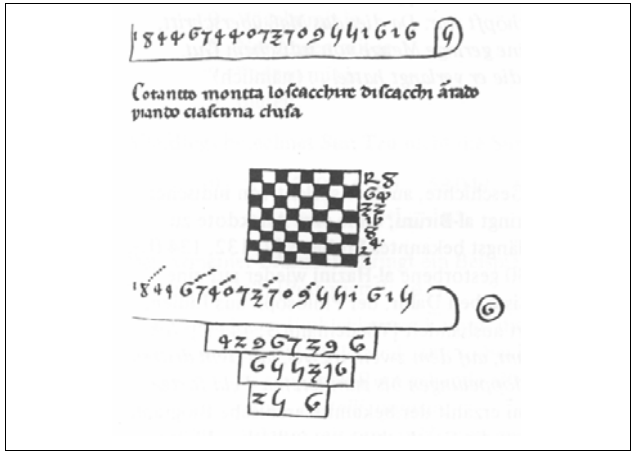
Ähnlich: „Einer hat ein Kuh verkauft nach den Klauen, der sein 16 …“ (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 317; p. 140 = Curtze 1894, 398).

Verkauf über ein Schachbrett mit Reiskörnern (geometrische Reihe)

„Ein Kunig hat versetzt das Peheimlandt und hat das versetzt nach dem Schachpret, das hält 64 Feld, und hat das geben nach dem ersten Feld um 1 Haller, und das ander um 2, das drit 4 etiam progressive et cetera ritscha(n)d(o). Quaeritur et cetera. Facit 1 844 674 407 370 955 1615, facit 1 537 228 672 809 1293 lb Regensburger und 15 gr. Das möchte kein Kaiser bezahlen.“

(AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 319; p. 141 = Curtze 1894, 398).

$2^0 + \ldots + 2^{64-1} = 2^{64} - 1 = (2^{10})^6 \cdot 2^4 - 1 = 1024^6 \cdot 16 - 1 > (10^3)^6 \cdot 16 > 1{,}6 \cdot 10^{19}$.



(Tropfke 632 [Columbia-Algorismus 88r nach D. E. Smith 1925, 2, 550])

Münz-, Maß- und Gewichts-Einheiten

Münzen

Bei Münzeinheiten ist zu unterscheiden zwischen der Währung im Großhandel mit Gewürzen, Stoffen oder Metallen auf internationaler Ebene und der Währung im Kleinhandel mit lokalem Charakter. Als größere Zahlungseinheit im Geldverkehr bildete sich der Gulden im ausgehenden Mittelalter mit den wachsenden weitreichenden Handelsverbindungen heraus. Er wurde zuerst 1252 in Florenz (Florentiner), dann auch in Genua geprägt. Der Gulden entsprach etwa dem römischen Goldsolidus des 6. Jahrhunderts zu 3,78 g Feingold.

In Deutschland wurde der Gulden 1356 durch Karl IV. als Zahlungsmittel eingeführt. Eine Ausprägung von größerem Umfang erfolgte im Jahre 1386, wobei 66 Rheinische Goldgulden auf eine Kölner Mark gingen. Dieser Rheinische Gulden (Florentiner, Florin, Floren) setzte sich in der Folgezeit in Deutschland als stabile Währungseinheit durch. Als kleinere Rechnungseinheiten dienten der Schilling und der Heller mit den Relationen 1 Rheinischer Gulden = 20 Schilling in Gold und 1 Rheinischer Gulden = 240 Heller in Gold. Schilling und Heller dienten lediglich für die Buchführung als Rechnungseinheiten und wurden nicht als Münzen ausgeprägt. Für 5 Schilling existiert noch die Münzeinheit Ort, also 1 Rheinischer Gulden = 4 Ort in Gold. Neben Gulden gab es noch Dukaten mit einer höheren Feinheit als der Gulden. Für 100 Dukaten war ein Aufgeld von $25\frac{3}{4}$ bis 32 Gulden zu zahlen, so daß sich folgende Gleichsetzung ergibt: 100 Dukaten äquivalent mit $125\frac{3}{4}$ bis 132 Rheinische Gulden. Außerdem findet sich noch die Relation 100 Rheinische Gulden = 76 Ungarische Gulden.

Der Kleinhandel mit vorwiegend lokalem Charakter (bezogen auf Nürnberg) wurde meistens mit Pfennigen (Abkürzung: dn. = denarius) und Heller (1 Heller = 2 Pfennige) abgewickelt. Größere Zahlungseinheiten waren das Pfund (Abkürzung: lb. = libra) und der aus Böhmen stammende Groschen. Es galten die Relationen 1 Pfund (lb) = 30 Pfennig (dn), 1 Groschen = 7 Pfennig (dn), 1 Rheinischer Gulden = 19 Groschen, 1 Ungarischer Gulden = 24 Groschen, 1 Dukaten = 25 Groschen, 60 Groschen = 1 Schock.

Gewichte

1 Zentner (c) = 100 Pfund (Abkürzung: oder lb. = libra). Die Abkürzungen für Pfund als Gewichtseinheit (℔) und Währungseinheit (lb) werden nicht konsequent auseinandergehalten. Man muß aus dem Zusammenhang herauslesen, was gemeint ist.
1 Pfund = 32 Lot, 1 Lot = 4 Quent, 1 Quent = 4 dn-Gewicht (Pfennig-Gewicht), 1 dn-Gewicht = 2 Heller-Gewicht. Außerdem gilt: 1 Unze = 2 Lot, 1 Mark = 16 Lot.

Das Pfund als Gewichtseinheit erfuhr eine unterschiedliche Interpretation: 100 Pfund in Nürnberg = 116 Pfund in „pruck“ (Innsbruck), 100 Pfund in Venedig = 60 Pfund in Nürnberg, 100 Pfund in Eger = $133\frac{1}{3}$ in Nürnberg, 1 Kargo (Pfeffer) = 400 Pfund in Venedig.

Zur Bestimmung des Feingehaltes von Gold wird die Mark zugrunde gelegt. 1 Mark hält am Strich 24 Karat (auch Gran) 1 Karat = 4 Gran. Die Feinheit des Edelmetalls wurde durch „Streichen“ am Probierstein ermittelt.
1 Mark = 8 Unzen, 1 Unze = 2 Lot, 1 Lot = 2 Quart, 1 Quart = $\frac{3}{2}$ Say, 1 Say = $\frac{4}{3}$ Quent, 1 Quent = 4 dn-Gewicht.
1 dn-Gewicht = 2 Heller -Gewicht, 1 Heller-Gewicht = $\frac{9}{4}$ Karat, 1 Karat = 4 Gran.

In Venedig galt Karat als Gewichtseinheit.

Maßeinheiten für Wein, Getreide, Fisch, Eisen

1 Fuder = 12 Eimer = 816 Maß, 1 Eimer = 68 Maß.

1 Sumer Korn = 16 Metzen, 1 Sumer Hafer = 32 Metzen (Diese Nürnberger Maße waren in dieser Stadt noch 1848 in Gebrauch.) 12 Tonnen Heringe = 1 Last, 1 Pfund Eisen = 240 Schienen (wohl Eisenstäbe).

Längeneinheiten für Stoffe

Fardel	Saum	Tuch	Parchent	Ellen
1			45	.
	1	22		
		1		32
			1	22

Diese Tabelle ließe sich vervollständigen. Man käme dann auf gebrochene Zahlen. Darauf wird hier verzichtet.

Zeiteinheiten

1 Arbeitstag = 11 Or (Stunden)

(Wagner 1483; Schröder 1988, 287-289)