

## Textaufgaben in deutschsprachigen Rechenbüchern des 15. Jh.

Die Rechenkunst in West- und Mitteleuropa begann um die Mitte des 15. Jahrhunderts, Klöster und Universitäten ebenso wie die lateinische Sprache hinter sich zu lassen. Sie wandelte sich zur Domäne der Kaufleute, für die volkssprachliche Rechenbücher verfasst wurden.

In der *Arithmetica practica* hatten sich damals die arabischen Zahlen noch längst nicht flächendeckend durchgesetzt. Wer sie schreiben konnte, rechnete „mit der Feder“; eine Anleitung zum Rechnen mit arabischen Zahlen hieß *Algorismus* nach dem persischen Mathematiker al-Khwarizmi (~780-~850). Die ältere Konkurrenzmethode der Rechnung „auf den Linien“ (Rechenpfennige auf einem Rechenbrett oder Abakus) hielt sich jedoch bis weit ins 16. Jh. hinein (vgl. Abb. *Algorist* und *Abacist* aus Gregor Reischs *Margarita Philosophica* 1503).

So musste noch Adam Ries (1492-1559) in seinem Bergbaukontor in Annaberg/Erzgebirge auf den Linien rechnen, privat verwendete er arabische Zahlen. Sein Rechenbuch (1522 und später) behandelte beide Methoden, die meisten anderen spezialisierten sich nur auf eine. Die illustrierenden Beispiele gleichen sich oft.

Die rein kaufmännischen Aufgaben geben wichtige kulturhistorische Aufschlüsse über gehandelte Waren und ihre Preise, über Edelmetalle und Währungen, über Gewichte und Längenmaße. Mathematisch gesehen sind sie aber nicht sehr spannend und ziemlich stereotyp. Derartige sollen hier nicht betrachtet werden, ebenso wenig kahle Aufgaben vom Typ „Ich tue dies und das mit einer Zahl, so dass jenes herauskommt; wie lautet die Zahl?“, wie wir sie auch aus heutigen Textaufgaben kennen. Das Augenmerk soll vielmehr auf Problemstellungen in typisch mittelalterlichem oder besonders originellem Gewand gerichtet werden. Es wird die **Kategorisierung nach Tropfke 1980, S. 513-660** verwendet.

Die folgende Auswahl ist meist deutschsprachigen Rechenanleitungen entnommen, die eindeutig vor 1500 datierbar sind. Es gibt davon ziemlich wenige: drei Bücher und vielleicht zwei Dutzend Handschriften, von denen fünf ediert sind (vgl. Quellenverzeichnis). U.a. wartet die Aufgabensammlung Vind. 3029 der Österreichischen Nationalbibliothek meines Wissens noch auf eine Edition. Erst mit Beginn des 16. Jh. beginnen gedruckte Rechenbücher regelrecht aus dem Boden zu schießen (Apian 1527, Ries 1518/1574 etc.).

Dem historischen Ursprung der Aufgaben und ihrer Verbreitung in mehreren Werken sowie wechselnden Gewändern wird nicht detailliert nachgegangen. In den Transkriptionen sind Schreibung und Satzbau etwas geglättet, süddeutsche Eigenheiten belassen.



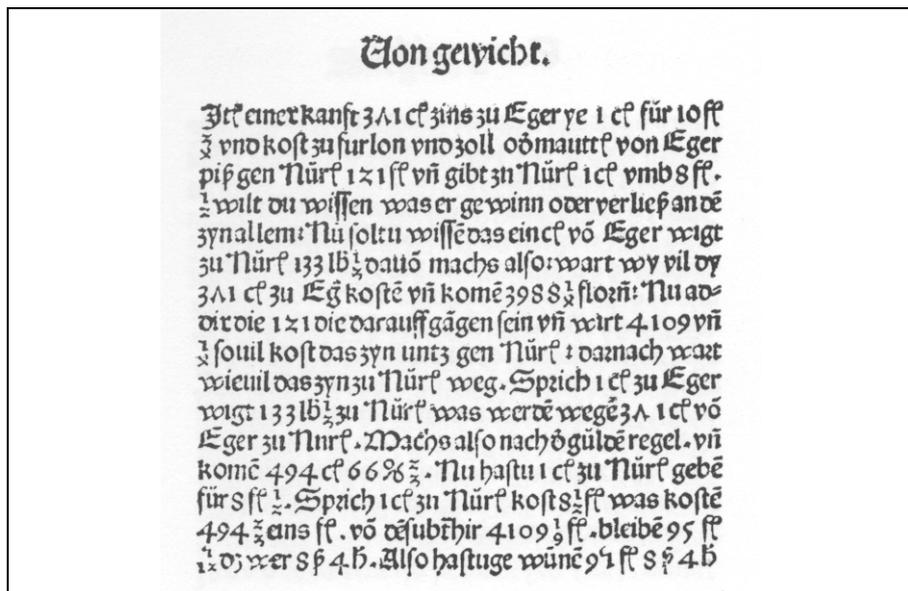
Algorist und Abacist (Gregor Reisch, *Margarita Philosophica* 1503)

## 4.1 Probleme aus dem täglichen Leben

### 4.1.1 Gewinn und Verlust: Warentransport 1

„Item. Einer kauft 371 ct Zinns zu Eger je 1 ct für 10 fl  $\frac{3}{4}$  und kost zu Fuhrlohn und Zoll oder Maut von Eger bis gen Nürnberg 121 fl und gibt zu Nürnberg 1 ct um 8 fl  $\frac{1}{2}$ . Willtu wissen, was er gewinn oder verlies [verlier] an dem Zinn allem. Nun solltu wissen, dass Zinn von Eger wiegt zu Nürnberg 113 lb  $\frac{1}{3}$ . Davon mach's also: ...“

(Wagner 1483; Schröder 1988, 56, 191)



(= Widmann 1489, 140-140v; Gärtner 2000, Nr. 228, p. 449)

Einkauf: 371 Zentner kosten zu Eger  $371 \cdot 10,75 \text{ fl} = 3988 \frac{1}{4} \text{ fl}$ ,  
hinzu kommen 121 fl für Transport etc,  
das ergibt einen Einstandspreis von  $4109 \frac{1}{4} \text{ fl}$ .

$1 \text{ ct(Eger)} = 133 \frac{1}{3} \text{ lb} = 1 \frac{1}{3} \text{ ct(Nürnberg)}$ , denn  $1 \text{ ct(Nürnberg)} = 100 \text{ lb}$

$371 \text{ ct(Eger)} = 371 \cdot 133 \frac{1}{3} \text{ ct(Nürnberg)} = 494 \frac{2}{3} \text{ ct(Nürnberg)}$

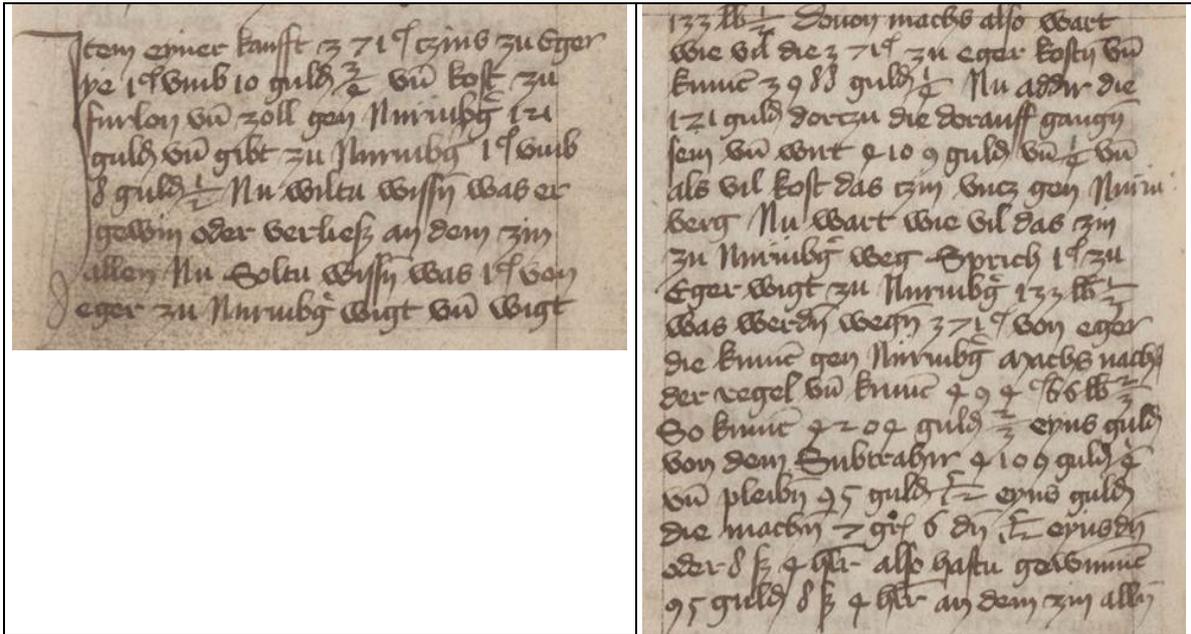
Verkauf:  $494 \frac{2}{3} \cdot 8 \frac{1}{2} \text{ fl} = 4204 \frac{2}{3} \text{ fl}$ .

Gewinn:  $4204 \frac{2}{3} \text{ fl} - 4109 \frac{1}{4} \text{ fl} = 95 \frac{5}{12} \text{ fl}$ .

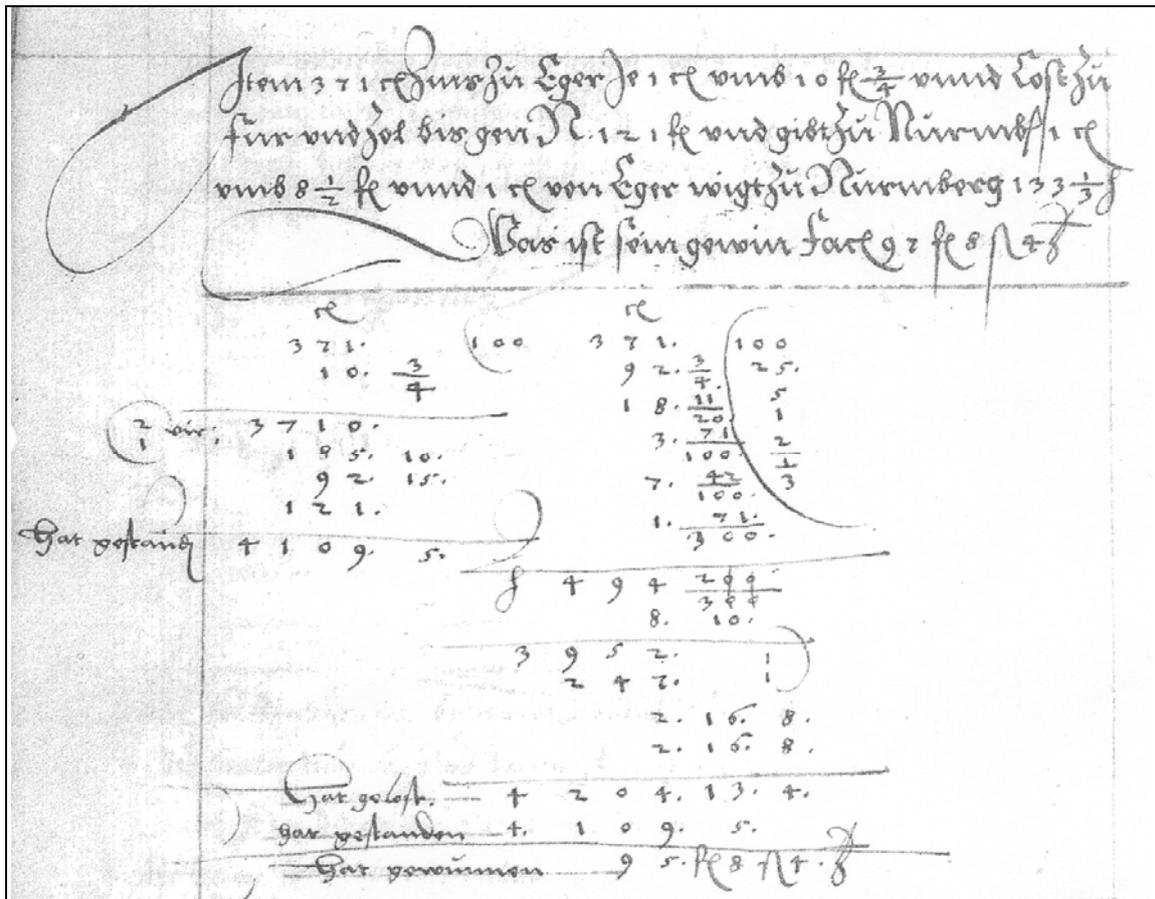
Ähnlich mit anderen Zahlenwerten (Ries 1574, 38).

Ähnlich: Ingwer von Venedig nach Nürnberg (Widmann 1489, 91-91v; Gärtner 2000, Nr. 137, p. 413 = Widmann 1489, 139v-140; Gärtner 2000, Nr. 227, p. 449).

### 4.1.1 Gewinn und Verlust: Warentransport 2



(Ars arithmetica ~ 1480; Vind. 3029, 33-33v)



(Behaim; Neudörfer 1547, Augsburg 4° Cod. 138, 35v)

#### 4.1.2 Warentausch, Stich, Stechen, Boreat (< it. baratto) 1

„2 wollen stechen mit Kaufmannschaft, der eine hat 58 ct 31 lb Wachs, der ander hat 24 ct 23 lb Ingwer. Nun gilt 1 ct Wachs bar 8 fl, den setzt er am Stich dar für 9 fl, und 1 ct Ingwer gilt bar 19 fl, den will er als gleich dar setzen am Stich als jener sein Wachs. Nu willtu wissen, wie teuer 1 ct dar komm und welcher dem andern zugeben muss.“

(AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 191, p. 89)

Gleicher prozentualer Stich-Aufschlag, d.h. Bar-Preis : Stich-Preis = 8 : 9 = 19 : x

Stich-Preis für 1 ct Ingwer:  $x = 19 \cdot 9/8 \text{ fl} = 171/8 \text{ fl} = 21 \frac{3}{8} \text{ fl}$

Stich-Preis für 24,23 ct Ingwer:

$2423/100 \cdot 171/8 \text{ fl} = 414333/800 \text{ fl} = 517 \frac{733}{800} \text{ fl}$

Stich-Preis für 58,31 ct Wachs:

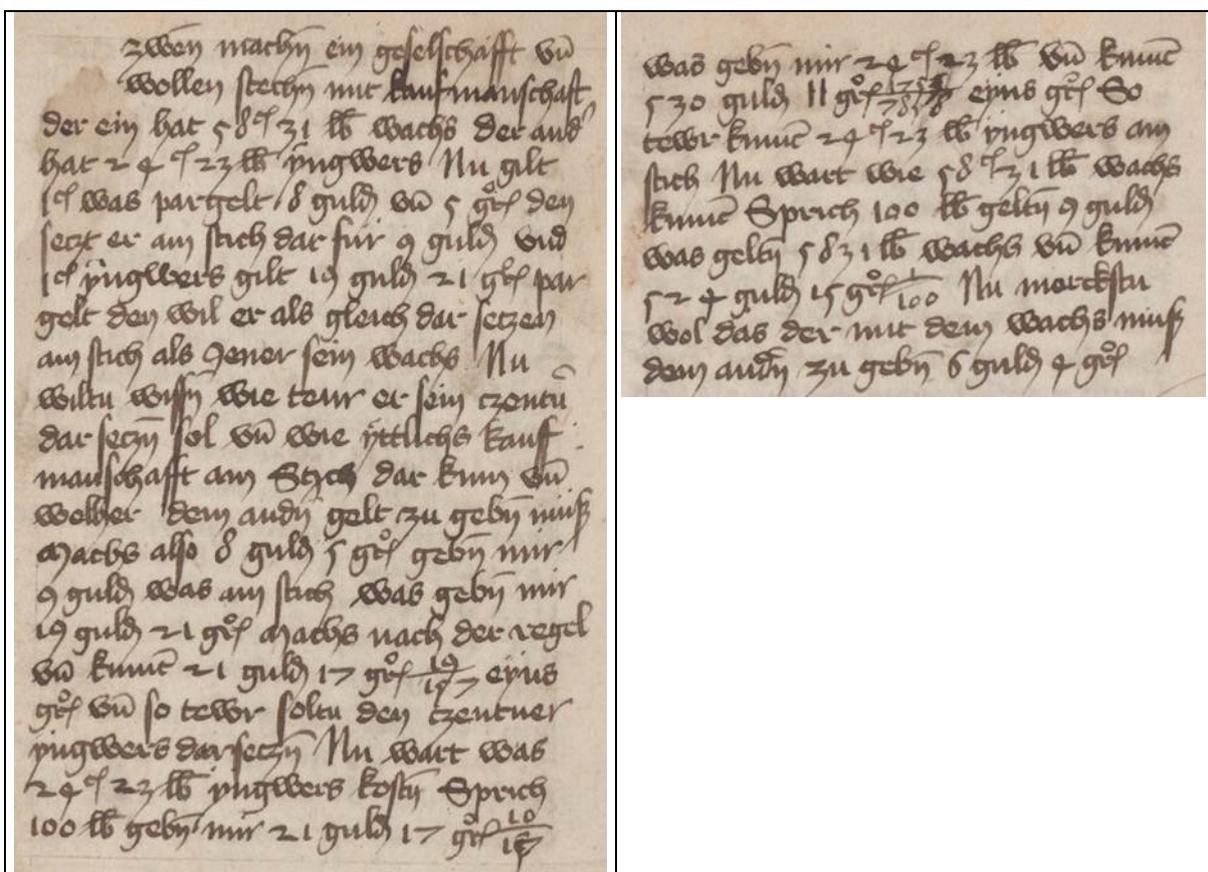
$5831/100 \cdot 9 \text{ fl} = 52479/100 \text{ fl} = 524 \frac{79}{100} \text{ fl}$

Differenz:  $52479/100 \text{ fl} - 414333/800 \text{ fl} =$

$(419832 - 414333)/800 \text{ fl} = 5499/800 \text{ fl} = 6 \frac{699}{800} \text{ fl}$

So viel muss der Ingwer-Besitzer dem Wachs-Besitzer geben.

Mit geringfügig anderen Preisen:



(Ars arithmetica ~ 1480; Vind. 3029, 61v-62)

#### 4.1.2 Warentausch, Stich, Stechen, Boreat (< it. baratto) 2



(Tropfke 526 [F. Calandri 1491, Nr. 57])

#### 4.1.3 Arbeits- und Dienstleistungen:

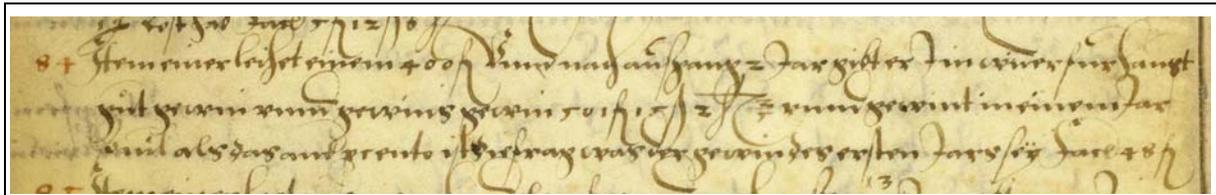
##### Kerzen brennen (Regula quinque wie Kostknaben)

„4 Kirtzen prynnen in 5 horis 2 ½ lb Wachs hin. Wie viel lb Wachs prinett an 16 Kirtzen hin in 11 horis?“ (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 28, p. 35). Lösung: 22 lb.

#### 4.1.6 Zins- und Zinseszins-Rechnung 1

„Item. Einer leihet einem 400 fl und nach Ausgang 2 Jahr gibt er ihm wieder für Hauptgut, Gewinn und Gewinns Gewinn 501 fl 15 sch 2 hl  $\frac{2}{5}$  und gewinnt in einem Jahr so viel als das ander pro rento [?]. Ist die Frag, was der Gewinn des ersten Jahrs sei. Facit 48 fl.“

(Neuber; Winckler 1561, Nürnberg Cent. V App. 103, Aufgabe 84)



(Passim im AR)

Diese Aufgabe ist u.a. wegen der Genauigkeit der Zinseszinsrechnung (bis auf Bruchteile eines Hellers) interessant. Es ist kein Lösungsweg angegeben.

Währungsumrechnung:

$$1 \text{ fl} = 20 \text{ sch} = 240 \text{ hl}; 1 \text{ sch} = 12 \text{ hl}$$

Zinseszinsformel für 2 Jahre (H Hauptgut, G Gesamtwert, x Zinssatz)

$$(H + Hx) + (H + Hx)x = H (1 + x + x + x^2) = H (1 + x)^2 = G$$

$$x = \sqrt{(G/H)} - 1$$

Gewinn nach dem ersten Jahr: Hx

Umrechnung des Gesamtwertes nach 2 Jahren in Bruchteile von Gulden:

$$15 \text{ sch} = 0,75 \text{ fl}$$

$$2 \text{ hl } \frac{2}{5} = 2,4 \text{ hl} = \frac{1}{100} \text{ fl}$$

$$501 \text{ fl } 15 \text{ sch } 2 \text{ hl } \frac{2}{5} = 501,76 \text{ fl}$$

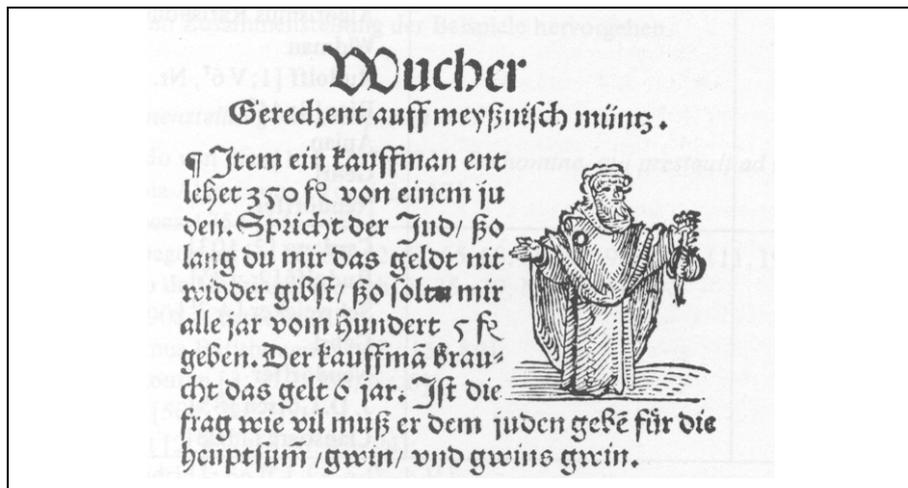
$$\text{Zinssatz } x = \sqrt{(501,76 \text{ fl} / 400 \text{ fl})} - 1 = 22,4 / 20 - 1 = 1,12 - 1 = 0,12 = 12 \%$$

$$\text{Gewinn nach dem ersten Jahr: } Hx = 400 \text{ fl} \cdot 0,12 = 48 \text{ fl}$$

#### 4.1.6 Zins- und Zinseszins-Rechnung 2: geometrische Folge

„Item. Ein Kaufmann entleihet 350 fl von einem Juden. Spricht der Jud: «So lang du mir das Geld nicht widergibst, so sollst du mir alle Jahr vom Hundert 5 fl geben.» Der Kaufmann braucht das Geld 6 Jahr. Ist die Frag, wie viel muss er dem Juden geben für die Hauptsumme, Gewinn und Gewinns Gewinn.“

(Apian 1527, L 8)



Geometrische Folge:

Hauptsumme (HS):  $K_0 = 350$

HS + Zins 1. Jahr:  $K_1 = 350 + 350 \cdot 0,05 = 350 \cdot (1+0,05) = K_0 (1 + p/100)$

HS + Zins(eszins) 2. Jahr:  $K_2 = K_1 + K_1 \cdot 0,05 = K_1 (1 + p /100) = K_0 (1 + p/100)^2$

HS + Zins(eszins) 3. Jahr:  $K_3 = K_2 + K_2 \cdot 0,05 = K_2 (1 + p /100) = K_0 (1 + p/100)^3$

usw.

Zinseszinsformel für das Kapital nach n Jahren bei einem Zinssatz von p %:

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-1} \cdot p/100 = K_{n-1} (1 + p /100) = K_0 (1 + p/100)^n$$

Im vorliegenden Fall:  $K_0 = 350$  fl;  $p = 5$  %;  $n = 6$  Jahre

$$(1 + p/100)^6 = (1 + 0,05)^6 = (1,05^2)^3 = 1,1025^3 = 1,340095640625 \approx 1,34010$$

$$K_6 = 469,03347421875 \text{ fl}$$

Ähnlich: „Ein Jud hat mir geliehen 26 ½ lb Pfennig Regensburger ...“ (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 134-135, p. 69)

#### **4.1.9 Gesellschaftsrechnung (proportionale Verteilung) 1** **(Dreisatz, Regula de tre / tri, Regula aurea)**

Beispiele für mittelalterliche Zusammenschlüsse von Kaufleuten, so wie wir heute von Wirtschafts-, Kapital- und Handelsgesellschaften in verschiedenen juristischen Formen sprechen, finden sich häufig. Unter „Hauptgut“ wird eine Einlage oder ein Einsatz verstanden, ein Geldbetrag, der in eine Gesellschaft eingesetzt wird. Höhe und Dauer der Einlagen können innerhalb derselben Gesellschaft differieren, so dass bei Beendigung der Gesellschaft Gewinn und Verlust genau auf die Gesellschafter verteilt werden müssen. Im folgenden Beispiel ist die Währung der Florentiner Gulden.

„Item. Es sind drei Gesellen, machen eine Gesellschaft. Der erst legt 30 flor., der ander 65 flor., der dritt 70 flor. und haben gewonnen 100 flor. Was steht nun einem jeden zu?

Mach's also: Nimm das Hauptgut von allen drein und tue zusammen [addiere], macht 165 flor. Nun mach's also: 165 flor. [Einlage] gibt mir 100 flor. Gewinns. Was gibt mir 30 flor. [Einlage] gesondert? Nun setz es also in die Regel 165 100 30 etc.“

(Linienrechenbuch, Rott am Inn ~1460; Clm 15558, 197r; Vogel 1973, 43-44)

Gemeint ist der schon im Mittelalter weit verbreitete Dreisatz (Regula de tri, Regula ternaria, goldene Regel, Verhältnisrechnung), deren Anwendung die Gleichung  $165 : 100 = 30 : x$  mit dem Ergebnis  $x = 18 \frac{30}{165}$  liefert. Der erste Gesellschafter macht mit einem Einsatz von 30 Gulden demnach einen Gewinn von  $18 \frac{30}{165}$  Gulden.

Ähnliche Aufgaben im AR (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 169, 192, 193, 194).

Ähnlich mit 65 fl Hauptgut (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 193, p. 90 = Wagner 1483, 30; Schröder 1988, 65-66, 198).



(Ries 1574, 52)

#### 4.1.9 Gesellschaftsrechnung (proportionale Verteilung) 2

„Männiglich soll merken Rechnung von Gesellschaft, die hernach [ein]begriffen sind, wenn dadurch manchen, [dem] zu kurz geschehen, [vor] Schaden bewahren mag. Es sind drei Kaufmann, die machen ein Gesellschaft. Der erst legt 300 fl, der ander 340, der dritt 270. Nun willst du wissen, wenn sie gewonnen haben 210 fl, was jeglichem zu seinem Teil gebührt ...“

(Wagner 1483, 29; Schröder 1988, 63-64, 196-197)

**Von gesellschaft. Das. 13. Capitel.**

**M**änniglich sol mercken rechnung von gesellschaft die hernach begriffen sind. wann dadurch manchen zu kurz geschehen. schaden bewahren mag. ¶ Es sind drey kauffmā die machen ein gesellschaft. der erst legt 300 fl. d̄ and̄ 340. d̄ drit 270. Nu wiltu wissen wen̄ sy gewūnē habē 210 fl was yglichem zu seinē teyl gebūro setz also hernach.

300 fl	69 fl 2 s 11 h <sup>1</sup> / <sub>2</sub>
340     210 fl	18 9 2 <sup>10</sup> / <sub>12</sub>
270	62 6 1 <sup>11</sup> / <sub>12</sub>

910. Sumir die gulde allzusamē werdē 910. Sprich 910 fl haubtguts gebē 210 fl gewins was gebē 300 fl haubtguts. Multiplicir 300 mit 210 werdē 63000. die teile in 910. vñ komē 69 fl 2 s 7 h <sup>1</sup>/<sub>2</sub> vñ alsuil gepürt dē der 300 fl gelegt hat. Dar nach setz also 910 fl gebē 210 was gebē 340. vñ

komen 78 fl 9 s 11 h <sup>10</sup>/<sub>12</sub> vñ sonil gepürt dem d̄ 320 fl gelegt hat. Nu setz aber 910 geben 210 fl was gebn 270 vñ komen 62 fl 6 s 11 h <sup>11</sup>/<sub>12</sub> vñ alsuil gepürt dem der 270 fl gelegt hat 2 fl.

¶ wiltu solchs pbirē so sumir was yglichem zu seinem teyl gepürt vñ addir zū ersten das gebrochē <sup>1</sup>/<sub>12</sub> <sup>10</sup>/<sub>12</sub> <sup>11</sup>/<sub>12</sub> zu samē werdē <sup>26</sup>/<sub>12</sub> das ist z̄ h̄ die addir zu d̄ yse h̄rn werdē 12 h̄l macht 1 s den addir zu dē adern s vñ komē 20 s ist 1 fl den addir zu dē gulde komē denn 210 fl (so ist es recht. desgleich mach alle and̄ gesellschaft vñ pbirs 2 fl.

wer ab̄ in gebrochē geūbt ist d̄mach sein prob also teyl den gewin in die ganczē sum als teyll 210 fl in 910 werdē <sup>210</sup>/<sub>910</sub> das mach zū minstē vñ werdē <sup>1</sup>/<sub>12</sub>.

Nu mult̄ . yglichs haubtgut mit dē zeler vñ teyls in nēner vñ sol gleich komē als obē stet

(= AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 192, p. 89-90)

(= Widmann 1489, 183; Gärtner 2000, Nr. 302, p. 478)

(= Ars arithmetica ~ 1480; Vind. 3029, 47v)

910 fl Hauptgut liefern 210 fl Gewinn, also 210/910 fl je fl Hauptgut.

Umrechnungen: 1 fl = 20 Schilling, 1 Schilling = 12 Heller.

### 4.1.9 Gesellschaftsrechnung (proportionale Verteilung) 3

sey machn ein gesellschaft der erst  
 legt 300 guld der ander 340 der  
 drit 270 in habn gesammlic 210  
 guld Nu wiltu wissen was iltlichem zu  
 sein teil gepirt aydchs also Sumir die  
 guld all zu sam in setz also  
 300  
 340 ————— 210 geldin  
 270  
 910 Hauptgutz  
 Nu setz also 910 guld gebn 210 guld  
 was gebn 300 guld aynter 210 mit  
 300 in ward 63000 die teil mit  
 910 in kumic 69 guld 4 sch 7 gr 1/2  
 in soml gepirt dem der die 300 guld  
 gelegt hat darnach setz also aber nach  
 der regel also 910 gebn mir 210  
 was gebn mir 340 aynter 340 mit  
 210 in wert 71400 die teil mit  
 910 in kumic 78 guld 9 sch 2 gr 1/2  
 in soml gepirt dem der die 340  
 gelegt hat Nu machs aber als vor

Sprich 910 gebn mir 210 was gebn  
 mir 270 aynter 270 mit 210 in  
 wert 56700 die teil mit 910 in  
 kumic 62 guld 6 sch 1 gr 1/2 Soml  
 gepirt dem der dy 270 guld ge  
 legt hat  
 Wiltu wissen ab du im recht habst  
 getah oder nicht So Sumir was  
 iltlichem zu sein teil zu gepirt  
 setz also  
 300 facit 69 guld 4 sch 7 gr 1/2  
 340 facit 78 guld 9 sch 2 gr 1/2  
 270 facit 62 guld 6 sch 1 gr 1/2  
 Sumir die 169 guld 13 sch 10 gr 1/2  
 ist 2 bla die addir zu disen bla in  
 was dy 12 bla das ist 1 sch den addir  
 zu 6 sch ist 7 sch 9 sch ist 16 sch 4 sch ist  
 20 sch macht 1 guld den addir zu 2  
 wert 3 sch 8 ist 11 sch 9 ist 20 setz  
 in behalt behalt 2 sch 8 ist 8 sch 7  
 ist 17 sch 6 ist 21 die setz nach der 0  
 in was dy 210 guld in ist recht

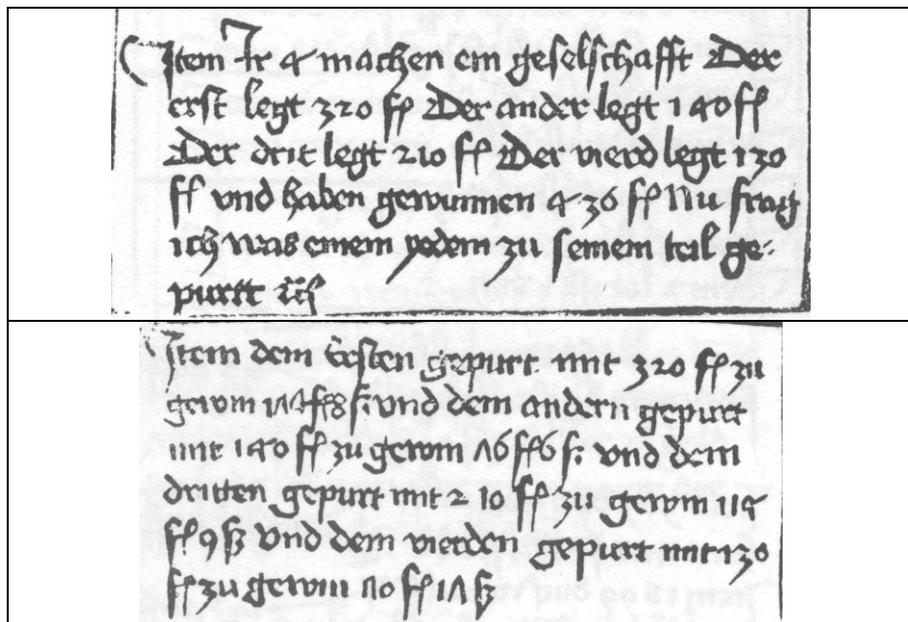
(Ars arithmetica ~ 1480; Vind. 3029, 47v-48 (= AR Nr. 192))

#### 4.1.9 Gesellschaftsrechnung (proportionale Verteilung) 4

„Item. Ihr 4 machen ein Gesellschaft. Der erst legt 320 fl. Der ander legt 140 fl. Der dritt legt 210 fl. Der viert legt 130 fl und haben gewonnen 436 fl. Nu frag ich, was einem jeden zu seinem Teil gebührt etc.

Item. Dem ersten gebührt mit 320 fl zu Gewinn 174 fl 8 β [Schilling] und dem andern gebührt mit 140 fl zu Gewinn 76 fl 6 β und dem dritten gebührt mit 210 fl zu Gewinn 114 fl 9 β und dem vierten gebührt mit 130 fl zu Gewinn 70 fl 17 β.“

(Bamberger Blockbuch, 12-12v; Vogel 1980, 29-30)



Gesamtes Hauptgut:  $320 \text{ fl} + 140 \text{ fl} + 210 \text{ fl} + 130 \text{ fl} = 800 \text{ fl}$

Gewinn je fl:  $436 \text{ fl} / 800 = 0,545 \text{ fl}$

Gewinn des ersten:  $0,545 \cdot 320 \text{ fl} = 174,4 \text{ fl} = 174 \text{ fl} \ 8 \ \beta$  [1 fl = 20 β]

Gewinn des zweiten:  $0,545 \cdot 140 \text{ fl} = 76,3 \text{ fl} = 76 \text{ fl} \ 6 \ \beta$

Gewinn des dritten:  $0,545 \cdot 210 \text{ fl} = 114,45 \text{ fl} = 114 \text{ fl} \ 9 \ \beta$

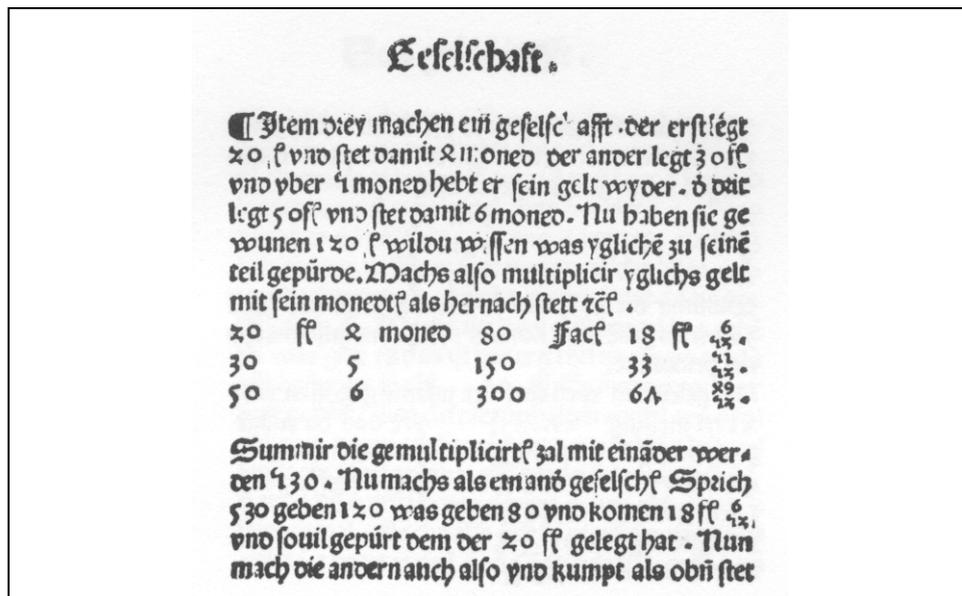
Gewinn des vierten:  $0,545 \cdot 130 \text{ fl} = 70,85 \text{ fl} = 70 \text{ fl} \ 17 \ \beta$

#### 4.1.9 Gesellschaftsrechnung: Gesellschaft auf Zeit 1 (Zinsformel: Wert · Zeit)

Unterschiedliche Einlagedauern können die Rechnung komplizieren:

„Item. Drei machen ein Gesellschaft. Der erst legt 20 fl und steht damit 4 Monat Der ander legt 30 fl und über 5 Monat hebt er sein Geld wieder. Der dritt legt 50 fl und steht damit 6 Monat. Nun haben sie gewonnen 120 fl. Willdu wissen, was jeglichem zu seinem Teil gebührte, mach's also: ...“

(Wagner 1483; Schröder 1988, 67, 198-199).



Lösung:  $(K_1t_1 + K_2t_2 + K_3t_3) p = Z$

bzw. ohne Proportionalitätsfaktor p:  $K_1t_1 + K_2t_2 + K_3t_3 \equiv Z$ .

$K_1t_1 + K_2t_2 + K_3t_3 = 20 \cdot 4 + 30 \cdot 5 + 50 \cdot 6 = 80 + 150 + 300 = 530$

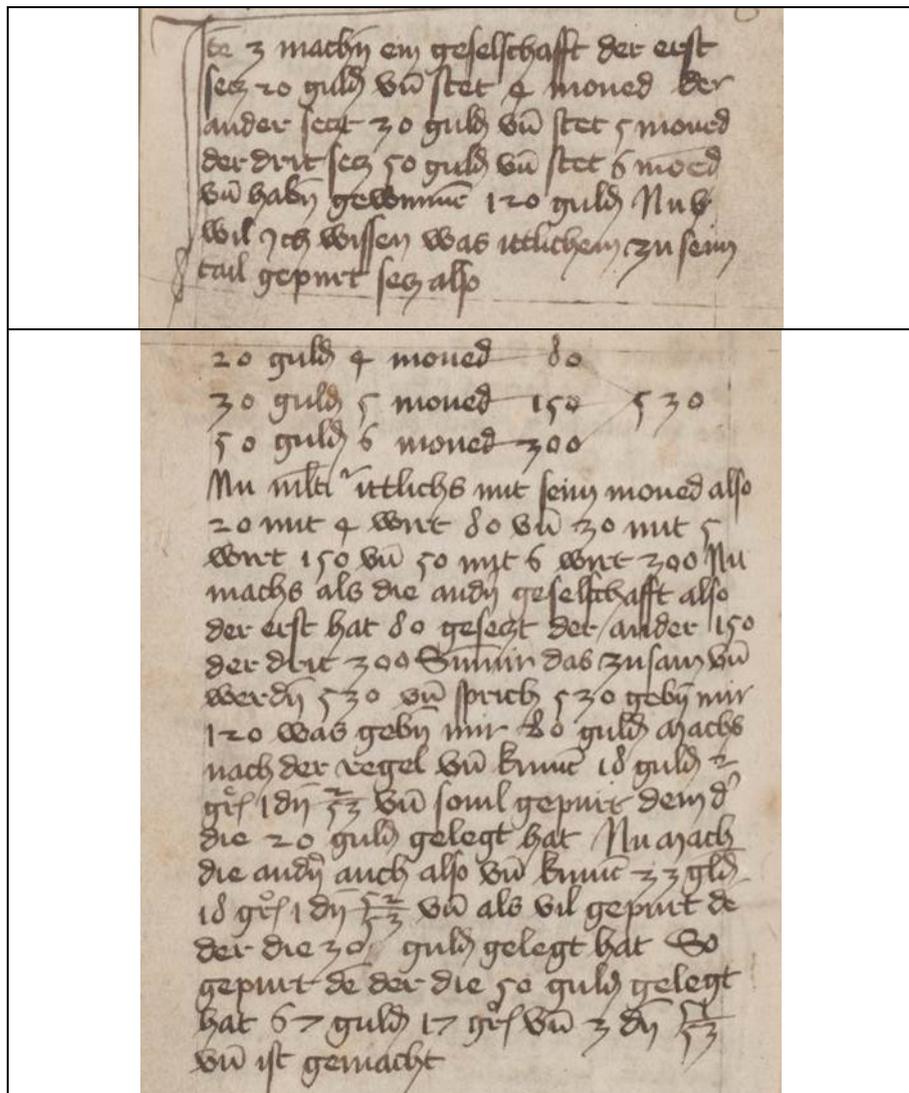
Gewinn von einem fl in einem Monat:  $120/530$  fl

Gewinn von 20 fl in 4 Monaten:  $120/530 \cdot 20 \cdot 4$  fl =  $960/53$  fl =  $18 \frac{6}{53}$  fl

Gewinn von 30 fl in 5 Monaten:  $120/530 \cdot 30 \cdot 5$  fl =  $1800/53$  fl =  $33 \frac{51}{53}$  fl

Gewinn von 50 fl in 6 Monaten:  $120/530 \cdot 50 \cdot 6$  fl =  $3600/53$  fl =  $67 \frac{49}{53}$  fl

4.1.9 Gesellschaftsrechnung: Gesellschaft auf Zeit 2 (Zinsformel: Wert · Zeit)



(Ars arithmetica ~ 1480; Vind. 3029, 50-50v)

#### 4.1.9 Gesellschaftsrechnung: Gesellschaft auf Zeit 3 (Regula de la cosa)

cosa it. ‘Ding’; Bezeichnung für eine Unbekannte, abgekürzt c oder  $\hat{d}$ , heute x.

„Regula de la cosa

Es sind drei Gesellen, die haben gesetzt 70 Gulden unter ihnen 3 und haben gewonnen 20 Gulden. Den ersten traf mit Hauptgut und mit Gewinn 15 Gulden, den andern 25 Gulden und den dritten 50.

Und der erste scheidt [setzt] 4 Manat, der ander 2 Manat, der dritte 2 Manat.

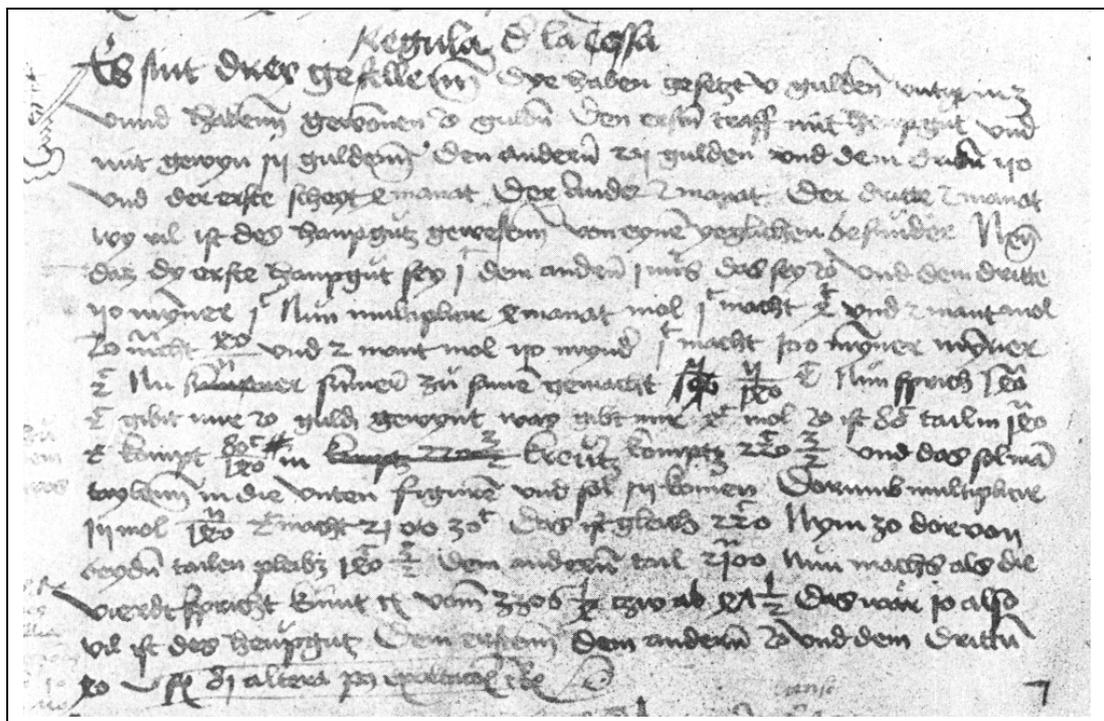
[Heute würde man etwa ergänzen: Dem andern seien 20 Gulden Hauptguts.]

Wie viel ist des Hauptguts gewesen von einem jeden gesondert? Nenn, dass die erste Hauptgut sey  $1^c$ , dem anderen 1 Numerus, das sei 20 [wird beliebig angenommen!], und dem dritten

50 [70 – 20] minder [minus]  $1^c$ . Nun multiplicir 4 Manat mol  $1^c$ , macht  $4^c$ , und 2 Manat mol

20, macht 40N, und 2 Manat mol 50 minder  $1^c$ , macht 100 minder  $2^c$  ...“

(Erste deutsche Algebra, 1481; Dresden C 80, 378v; Vogel 1981, 43 und 16-17)



(= AR Clm 14908, 156v, lt. Vogel 1981, 43; nicht ediert)

Aus „20 fl gewinnen 5 fl auf 2 Monate“ folgt:

Gewinn von 1 fl pro Monat:  $2,5 \text{ fl} / 20 = 1/8 \text{ fl}$

$Z = K_{pt} / 100 \rightarrow (K_{1t1} + K_{2t2} + K_{3t3}) p = Z$

$(4x + 40 + 100 - 2x) \cdot 1/8 = 20$

Lösung: Einsätze  $x = 10 \text{ fl}$ ;  $20 \text{ fl}$ ;  $40 \text{ fl}$ .

**4.1.9 Gesellschaftsrechnung (proportionale Verteilung), Zusätze:  
Die zerbrochene Glocke 1 (Tropfke S. 557)**

„Es ist ein Glocken und ist gemacht von Gold (50), Silber (60) und Glockspeis [Gussmaterial] (100) und wiegt jegliches als da steht. Die Glock wiegt miteinander 210 lb, und dieselb Glock zerbricht und fehlt ein Stück davon, das hat 100 lb. Nun will ich wissen, wie viel Golds und Silber und Glockspeis darin sein. Das mach als ein Gesellschaft ...“

(AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 194, p. 90)

Bei Apian ist die Legierung komplizierter:

„Es zerfällt die Glock und bricht in etliche Stück. Der Meister nimmt ein Stück, helt 1 ct 36 lb, will daraus eine kleine Glocken gießen und will die nach rechten Würden der zugelegten Metall verkaufen. Darum wollt er gerne wissen, wie viel eines jeglichen Metalls in diesem Stück sei ...“

(Apian 1527, H 7v)

4	℥	58	lb	Kupffer
2	℥	12	lb	Zyenn
1	℥	64	lb	Sylber
0	℥	40	lb	Goldt
2	℥	30	lb	Messing
0	℥	20	lb	Wysmat



Es zerfelt die glock vnd bricht in etliche stuck. Der Meyster nymbt ein stuck helt 1℥ 36 lb. wil dar auß eine kleine Glocken giessen/ vnd wil die nach rechten würden der zugelegte metal verkauffen Darumb wolt er gerne wyssen wie viel eines jeglichen metals in disem stuck sey. ...

Lösung:

Gesamtgewicht der Glocke bestimmen, dann Dreisatz.

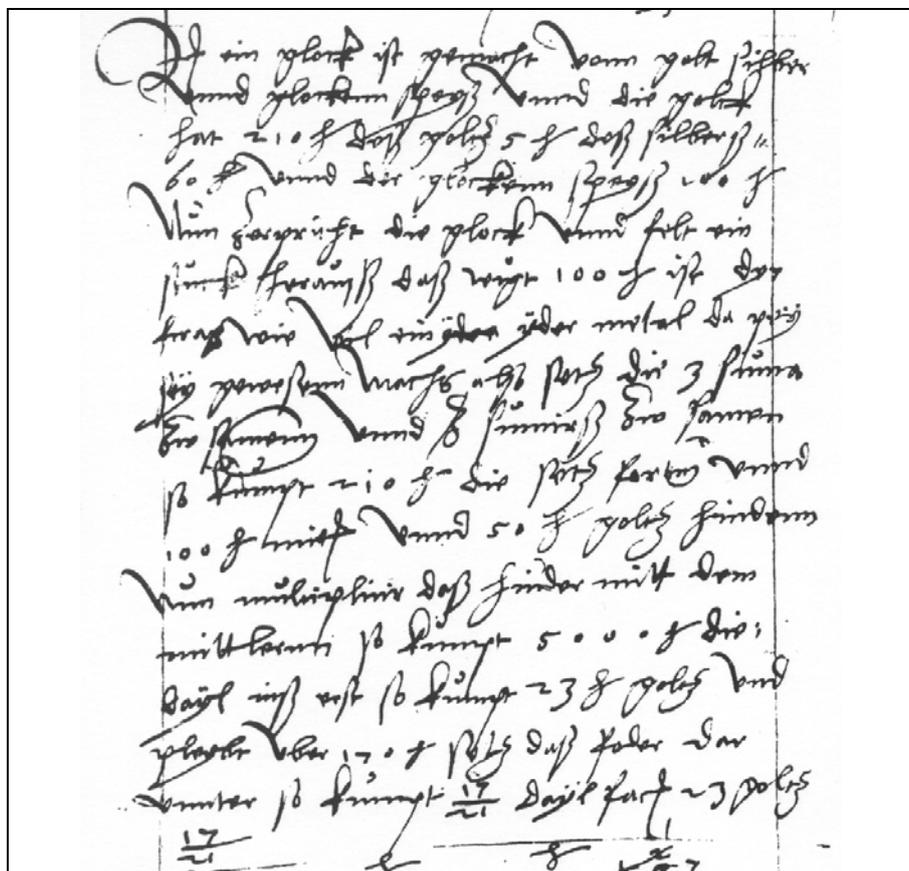
Gesamtgewicht:  $458 + 212 + 164 + 40 + 230 + 20 = 1124$  [lb].

**4.1.9 Gesellschaftsrechnung (proportionale Verteilung), Zusätze:  
Die zerbrochene Glocke 2**

Mit den gleichen Zahlenwerten wie im AR:

„Item. Ein Glock ist gemacht von Gold, Silber und Glockenspeis. Und die Glock hat 210 lb, des Golds 5[0] lb, des Silbers 60 lb und der Glockenspeis 100 lb. Nun zerbricht die Glock und fällt ein Stück heraus, das wiegt 100 lb. Ist die Frag, wie viel ein jedes Metall dabei sei gewesen. Mach's also: Setz die 3 Summa zusammen und summier's zusammen, so kommt 210 lb. Die setz vorn und 100 lb [als] Mittleres und 50 lb Golds hinten. Nun multiplizier das Hintere mit dem Mittleren, so kommt 5000 lb. Die teil ins Rest, so kommt 23 lb Golds und bleibt über 170 lb. Setz das Vordere darunter, so kommt 17/21 Teil. Facit 23 Golds 17/21.“

(Weltzell 1523; UB München 4° Cod. ms. 718, 85v)

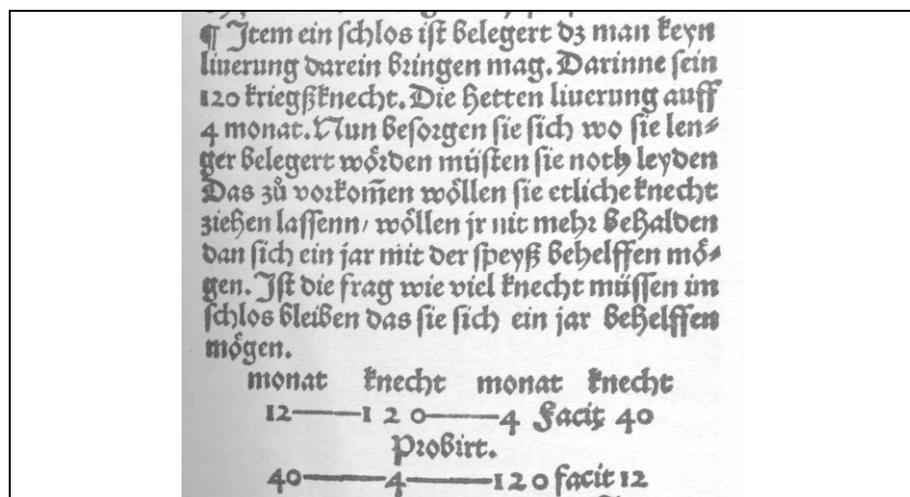




#### 4.1.11 Vermietung (Anzahl · Zeit = const): Belagerung

„Item. Ein Schloss ist belagert, das man kein Lieferung darein bringen mag. Darin sein 120 Kriegsknecht. Die hätten Lieferung auf 4 Monat. Nun sorgen sie sich, wo sie länger belagert würden, müssten sie Not leiden. Das zuvorkommen, wollen sie etliche Knecht ziehen lassen, wollen sie nit mehr behalten, denn sich ein Jahr mit der Speis behelfen mögen. Ist die Frag: Wie viel Knecht müssen im Schloss bleiben, dass sie sich ein Jahr behelfen mögen.“

(Apian 1527, I 5)



$$120 \cdot 4 = x \cdot 12$$

#### 4.1.12 Geldwechsel und Maßumrechnungen:

#### Entstehung einer Textaufgabe zu Geschwindigkeit, Strecke und Zeit 1

„Anno 1546 am Sonntag den achten Augusti hat  
Hänslein Neudorffer ob dem Nachtmahl zu seinem  
Vater [Rechenmeister zu Nürnberg] diese Wort gesagt:

«Vatter, 6 Meil ist 5 Jahr, was 1 Eln?»

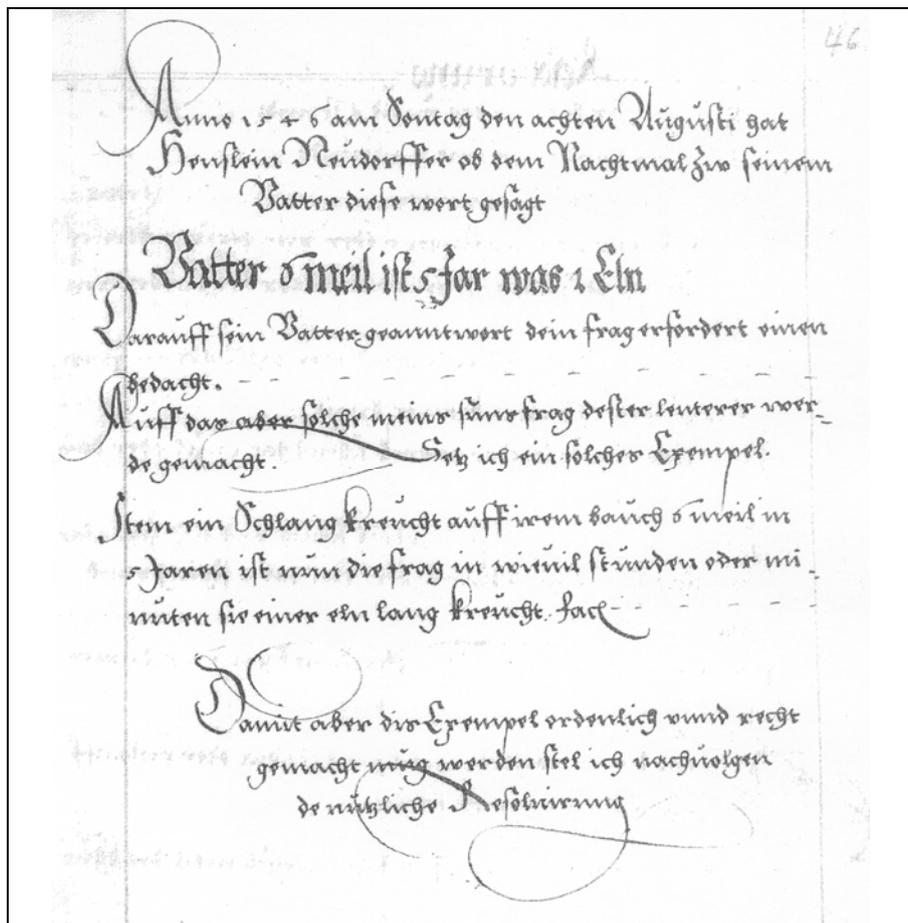
Darauf sein Vater geantwort: «Dein Frag erfordert einen  
Bedacht.»

Auf dass aber solche meins Sohns Frag desto leuterer [? lauter = klar] wer-  
de gemacht, setz ich ein solches Exempel.

Item. Ein Schlang kreucht auf ihrem Bauch 6 Meil in  
5 Jahren. Ist nun die Frag, in wie viel Stunden oder Mi-  
nuten sie einer Elle lang kreucht. Facit ...

Damit aber dies Exempel ordentlich und recht  
gemacht mög werden, stell ich nachfolgen-  
de nützliche Resolvierung.“

(Behaim; Neudorfer 1547; StaBi Augsburg 4° Cod. 138, 46r)



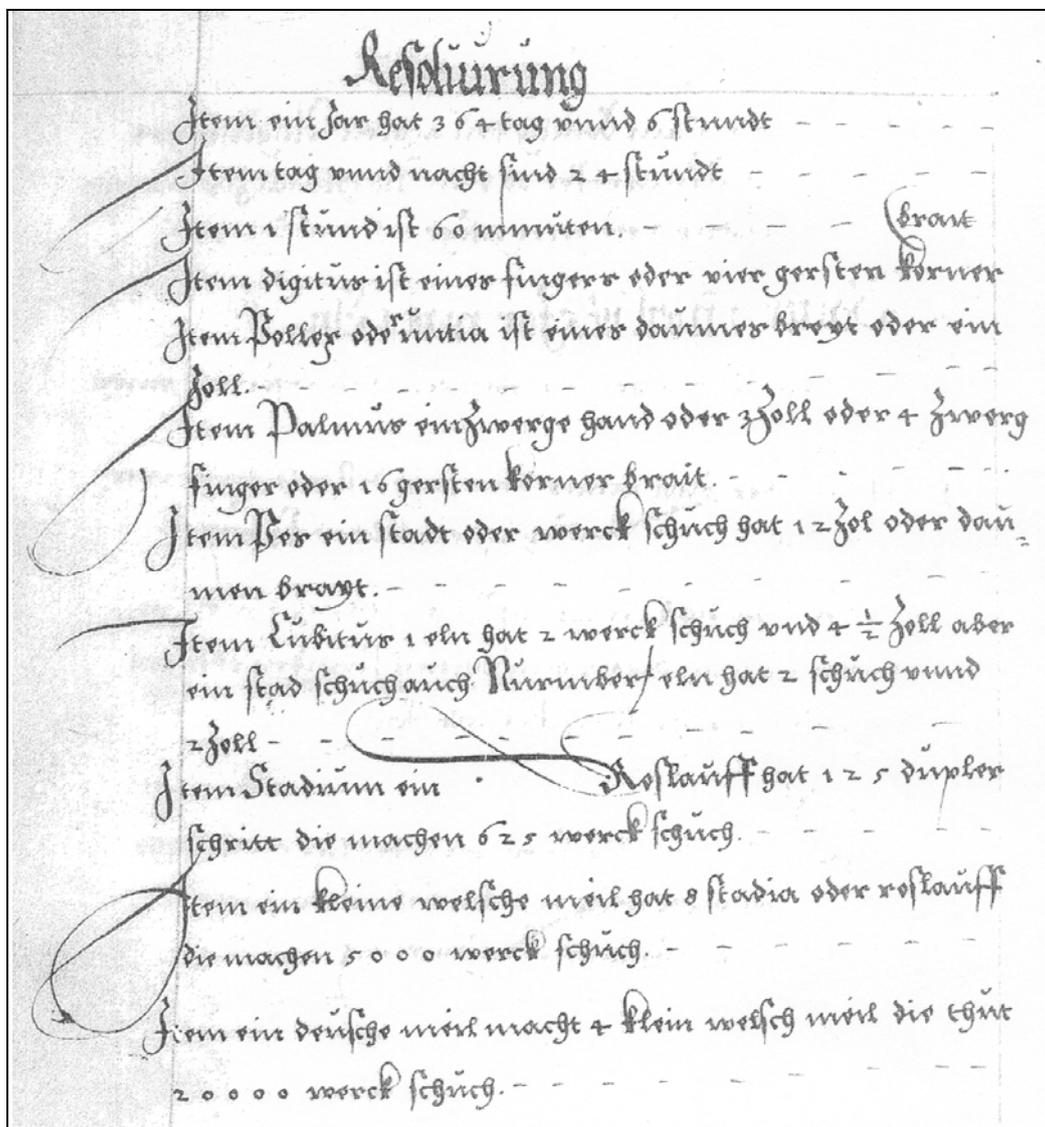
#### 4.1.12 Geldwechsel und Maßumrechnungen:

##### Entstehung einer Textaufgabe zu Geschwindigkeit, Strecke und Zeit 2

###### Historische Bemerkung:

Andreas Behaim der Ältere (1530-1612) aus dem bekannten Nürnberger Geschütz- und Glockengießergeschlecht ging 1546-1547 zum Schreib- und Rechenmeister Johann Neudörfer (1497-1563), der in Nürnberg ein Internat unterhielt, in die Ausbildung.

Die nächste Seite der Handschrift (46v) enthält eine Aufstellung der Zusammenhänge von Zeit- und Längenmaßen – mit dem Fehler „1 Jahr hat 364 [sic!] Tag und 6 Stund“. Dann folgt – mit diesem Fehler – die Berechnung der Lösung (47r), die hier in berichtiger Form wiedergegeben ist.



(Behaim; Neudörfer 1547; Augsburg 4° Cod. 138, 46v)

**4.1.12 Geldwechsel und Maßumrechnungen:**

**Entstehung einer Textaufgabe zu Geschwindigkeit, Strecke und Zeit 3**

Abschließend (47r) folgt die Lösung der Aufgabe:

1 Meile = 20.000 Werkschuh  $\rightarrow$  6 Meilen = 120.000 Werkschuh

1 Werkschuh = 12 Zoll (Daumenbreite)  $\rightarrow$  6 Meilen = 1.440.000 Zoll

1 Elle = 2 Werkschuh + 4 1/2 Zoll = (2 · 12 + 4 1/2) Zoll = 28 1/2 Zoll = 57/2 Zoll

$\rightarrow$  6 Meilen = 1.440.000 / 57/2 Ellen = 2.880.000 / 57 Ellen

1 Jahr  $\approx$  365 Tage 6 Stunden = 8766 Stunden

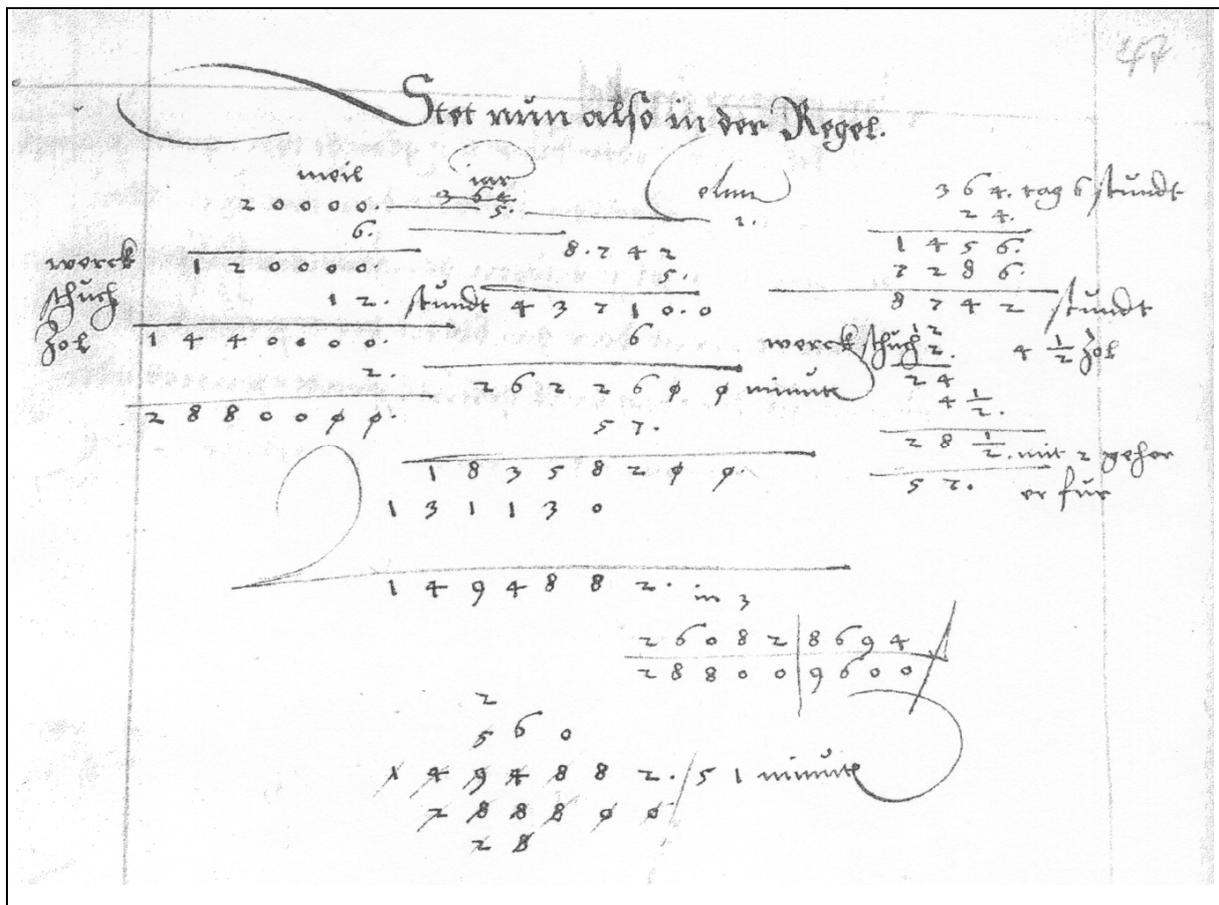
5 Jahre  $\approx$  43.830 Stunden = 2.629.800 Minuten

Jetzt sind Strecken- und Zeitangaben in passende Einheiten umgewandelt, und man kann äquivalent setzen:

2.880.000 / 57 Ellen  $\equiv$  2.629.800 Minuten

2.880.000 Ellen  $\equiv$  149.898.600 Minuten

1 Elle  $\equiv$  149.898.600 / 2.880.000 Minuten  $\approx$  52 Minuten



(Behaim; Neudörfer 1547; Augsburg 4° Cod. 138, 47r)

#### 4.1.14.1 Mischungsaufgaben: Legierungen, Münzschlag, Reinheit

„Exempel von Pagament und Schickung des Tiegels auff Silber und Gold

Item. Einer hat zweierlei gekornt Silber. Des ersten hält 1 Mark 9 Lot fein. Des andern 1 Mark 14 [nicht 13] Lot. Daraus will er mischen ein Werk, das soll haben 20 Mark, und 1 Mark soll bestehen auf 11 Lot ...“.

(Apian 1527, K 1)



Lösung:

$x$  Mark 9-lotiges und  $20-x$  Mark 14-lotiges Silber sollen 20 Mark 11-lotiges ergeben.

$$x \cdot 9 + (20-x) \cdot 14 = 20 \cdot 11$$

$$9x + 280 - 14x = 220$$

$$5x = 60 \quad \rightarrow x = 12 \text{ [Mark]}$$

$$y = 8 \text{ [Mark]}$$

#### Wein panschen

„23 Maß Wein, 1 Maß pro 5 pf, und ich will ihn ausgeben 1 Maß pro 3 pf ... Willtu nun wissen, wie viel Wasser daren sollt tun, dass du 1 Maß pro 3 pf mögst geben, dic sic ...“ (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 59, p. 46) Lösung:  $15 \frac{1}{3}$  Maß.

$$23 \cdot 5 = (23 + x) \cdot 3; \quad 3x = 23 \cdot (5 - 3)$$

## **4.2 Probleme der Unterhaltungsmathematik**

### **4.2.1 Lineare Probleme mit einer Unbekannten**

#### **4.2.1.1 Hau-Rechnungen (Bruchteile der Unbekannten)**

##### **4.2.1.1.1 Gott-grüß-euch-Aufgaben**

###### **Gespräche zwischen Gänsen und Gänsebruchteilen**

„Es spricht 1 Gans zu den anderen Gänsen: Ich grüß euch all 30 Gäns! Spricht ein Gans: Unser sein nit 30, denn wären unser noch als viel und noch als viel und halber Teil als viel, so wären unser 30. Nun ist die Frag, wie viel der Gäns sein.“

(AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 128, p. 67; ähnlich Nr. 129)

Lösung:  $3 \frac{1}{2} x = 30$ , also  $x = 8 \frac{4}{7}$  Gänse.

###### **Ähnlich mit „Gesellen“ ohne Bruchteile**

„Einer spricht: «Grüß euch Gott, Gesellen alle dreißig.» Antwort einer: «Wenn unser noch so viel und halb so viel wären, so wären unser dreißig.» Die Frag: Wie viel ihr gewesen? ...“ (Ries 1574, 58):

Lösung: 12 Gesellen.

###### **Ähnlich mit Jungfrauen ohne Bruchteile**

„Danach geht er [ein Jüngling] weiter, so begegnen ihm Jungfrauen. Also spricht er zu der einen: «Von wanne geht ihr all zehn?» Antwort ihm die selbige sprechend: «Unser sein nicht 10, sondern wenn unser noch so viel wären, als unser sein, und das dritte Teil so viel, so wären unser so viel über 10, als itzund unser ist unter 10.» Nun ist die Frag, wie viel der Jungfrauen gewest ist. Facit 6“ (Widmann 1489, 235-235v; Gärtner 2000, Nr. 383, p. 511).

### 4.2.1.1.3 Hau-Rechnungen – Die Stange im Wasser: Regel vom Turm 1

„Es ist ein Thurn gebaut nach solchen Sitten und des Thurn ist 1/4 im Erdreich und 1/5 im Wasser und 100 Schuch im Luft. Nun fragt man, wie viel Schuch sein im Wasser des Thurns und wie viel Schuch sein im Erdreich und wie viel Schuch sein an dem ganzen Thurn ...“

(Wagner 1483; Schröder 1988, 110-111, 222-223)

<b>Regel vom thurn .</b>
<p><b>¶</b> Es ist ein Thurn gepawet nach solichē sitten vñ des thurn ist ¼ im ertrich vñ ⅕ im wasser vñ 100 schuch im luft. Nu fragt man woyuil schuch sein im wasser des thurns vñ woyuil schuch sein im ertrich vñ woyuil schuch sein an dem gantzen thurn wil du d; wissen such ein zal da du innen vndest ½ vñ ¼ gen: zlich nym dy mynsten zal das ist 20 So pric) dan der 2 teyl vð 20 ist 5 der 5 teyl von 20 ist 4 vñ wren man dy selben thut von 20 so pleybe tennoh 11 teyl vð 20 Sprich 11 teyl geben 100 schuch woy</p>
<p>uil gebē mir 2 teil. So machs dan als dy regel auß weyft * wil du aber wisse wieuil schuch sein im ertrich. Sprich 11 teyl geben 100 schuch wieuil geben 5 machs nach der regel. wil du aber wisse wieuil schuch im wasser sein. Sprich 11 gebē 100 woyuil geben 2 machs als vor t̄c.</p>

Lösung:  $1 - (1/4 + 1/5) = 1 - 9/20 = 11/20 \equiv 100 \text{ Schuh}$ ; Turmhöhe  $2000/11 \text{ Schuh}$

Ähnlich: „Ein Thurn ist 1/4 im Erdreich und 10 Schuch im Wasser und 3/5 im Luft. Nun frag ich, wie lang der Thurn sei und wie viel Schuch im Wasser sei und wie viel im Luft ...“ (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 107, p. 62). Lösung:  $3/20 = 10 \text{ Schuh}$ .

(= Widmann 1489, 150v; Gärtner 2000, Nr. 248, p. 456)

### Baum

Ähnlich: „Es ist ein Baum, der ist ob der Erden 1/4 und 1/5, und das unter der Erden ist, das ist 39 Ellen lang ...“ (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 288, p. 131).

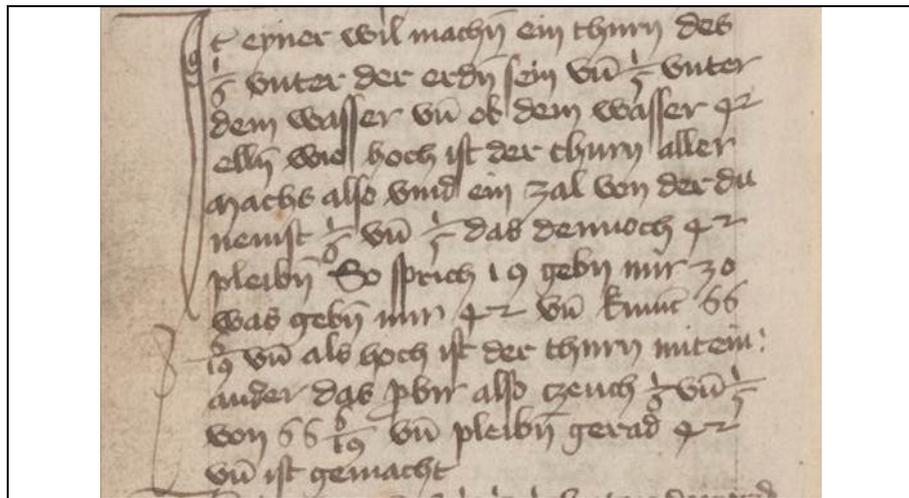
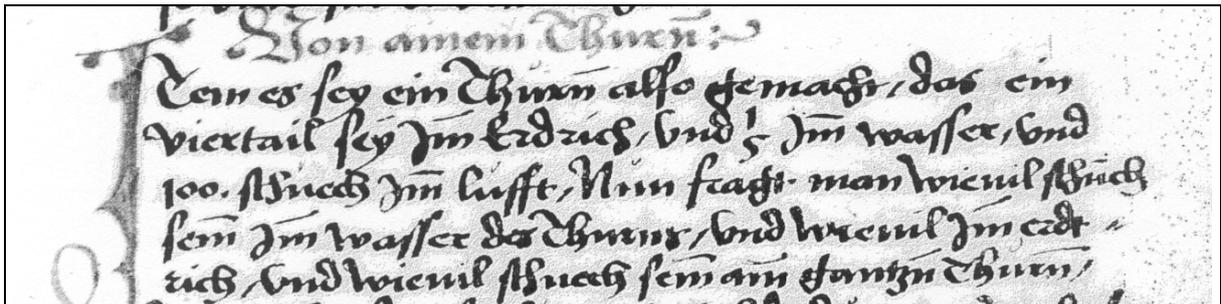
(= Widmann 1489, 151v; Gärtner 2000, Nr. 251, p. 457)

### 4.2.1.1.3 Hau-Rechnungen – Die Stange im Wasser: Regel vom Turm 2

Fast so wie Wagner:

„Es sei ein Thurn also gemacht, dass ein Viertel sei im Erdreich und  $\frac{1}{5}$  im Wasser und 100 Schuch im Luft. Nun fragt man, wie viel Schuch sein im Wasser des Thurns, und wie viel im Erdreich, und wie viel Schuech seien am ganzen Thurn.“

(Linienrechenbuch, Tegernsee ~1480; Cgm 740, 23r; Kaunzner 1970, 9).



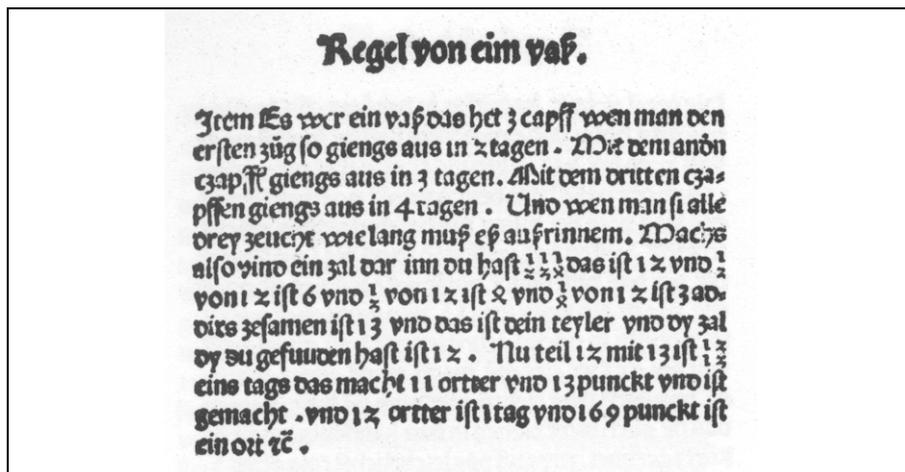
(Ars arithmetica ~ 1480; Vind. 3029, 66v)

#### 4.2.1.2 Zisternen-, Leistungsprobleme

##### 4.2.1.2.1 Eigentliche Zisternenaufgaben: Fass mit drei Zapfen

„Item. Es war ein Fass, das hat 3 Zapfen. Wenn man den ersten zög, so ging's aus in 2 Tagen. Mit dem andern Zapf ging's aus in 3 Tagen. Mit dem dritten Zapfen gings aus in 4 Tagen. Und wenn man sie alle drei zeucht [zöge], wie lang muss es ausrinnen? ...“

(Wagner 1483; Schröder 1988, 114, 224)



Lösung: Fließgeschwindigkeiten  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$  und  $\frac{1}{4}$  aufaddieren, ergibt  $\frac{13}{12}$ . Der Kehrwert davon liefert die Fließdauer  $\frac{12}{13}$  Tage. Weitergerechnet wird mit 1 Tag = 12 Örter und 1 Ort = 169 Punkt zum Endergebnis 11 Örter und 13 Punkte.

Ähnlich mit anderen Zahlenwerten: „Es ist ein Fass voll Wassers, darein geht 8 Eimer und hat 3 Zapfen ...“ (Widmann 1489, 137-137v; Gärtner 2000, Nr. 222, p. 447).

##### 4.2.1.2.2 Der Hausbau

„3 machen ein Haus, primus facit in 7 diebus, secundus in 5 diebus, tertius in 4 diebus, und wann sie das Haus haben gemacht? ...“ (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 70; p. 48-49). Lösung:  $\frac{140}{83}$  Tage.

Ähnlich: „Es sind 4 Meister, die wollen 1 Haus machen ...“ (Widmann 1489, 148-148v; Gärtner 2000, Nr. 243, p. 455).

##### 4.2.1.2.3 Das Schiff mit mehreren Segeln (Zahlenwerte wie Fass)

„Es ging 1 Schiff von Alkaier [Kairo] gen Constantinopel, hat 3 Segel. Und mit dem großen Segel ging es 2 menses, mit dem andern 3 und mit minsten 4 menses. Und wenn man all 3 Segel aufspannt, in wie viel Monaten sie gen Constantinopel kommen? Facit  $\frac{12}{13}$  eines Monates, ist 27 Tag 9 horae.

(AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 98, p. 59)

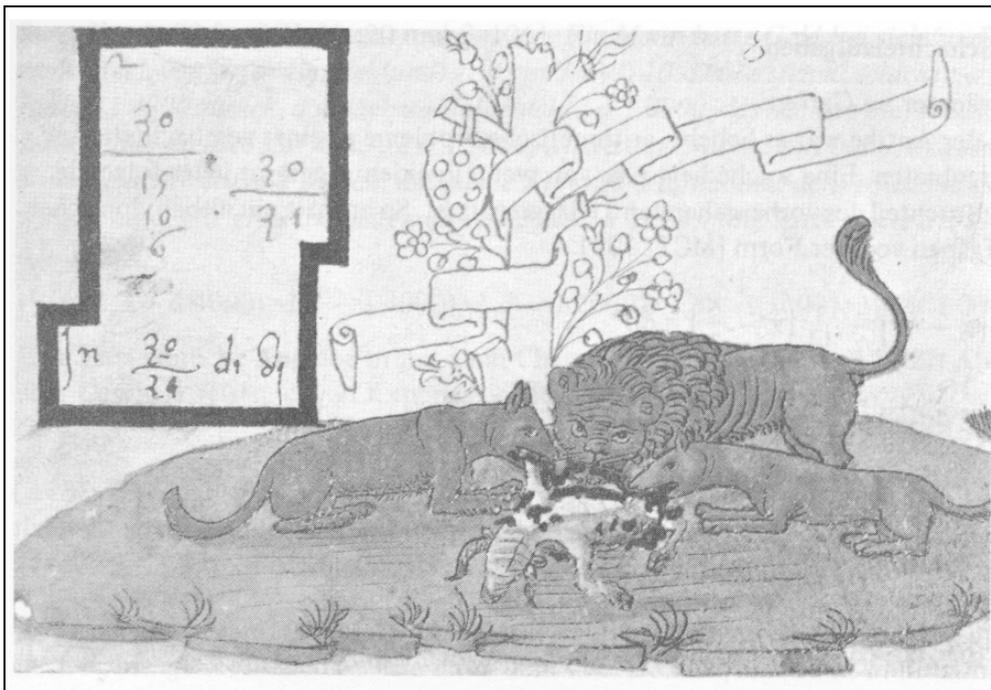
#### 4.2.1.2.4 Löwe, Wolf und Hund verzehren ein Schaf

„Item. Des gleichen 1 Leb und 1 Hunt und 1 Wolff. Die essen miteinander 1 Schoff. Und der Leb isst das Schoff allein in einer Stund, und der Wolff in 4 Stunden und der Hunt in 6 Stunden. Nun ist die Frage, wenn sie das Schoff alle 3 miteinander essen, in wie langer Zeit sie das essen.

Mach's also: Multiplicir 1 Stund  $\cdot 4 \cdot 6$  miteinander, facit 24. Nun nimm 1 Ganzes von 24, ist 24, und  $1/4$  von 24, ist 6, und  $1/6$  von 24, ist 4. Darnach addir die zusammen, facit 34. Setz also  $24/34$ , facit  $12/17$  [Stunden], macht 42 Minuten  $6/17$  und ist die Zeit.“

(Widmann 1489, 138-138v; Gärtner 2000, Nr. 223, p. 448)

Zum Verständnis der genannten Bruchaddition muss man etwas ausholen. Der Löwe bringt es auf eine Fressgeschwindigkeit von 1 Schaf/h, der Wolf auf  $1/4$ , der Hund auf  $1/6$ , die tierische Feinschmeckergemeinschaft auf die Summe der Einzelfressgeschwindigkeiten, nämlich auf  $(1 + 1/4 + 1/6)$  Schafe/h =  $17/12$  Schafe/h. Das eine Schaf wird daher in  $12/17$  Stunden verzehrt. Wenn da nicht noch die Fressgeschwindigkeit des Löwen in Bezug auf Hunde und Wölfe wäre ...



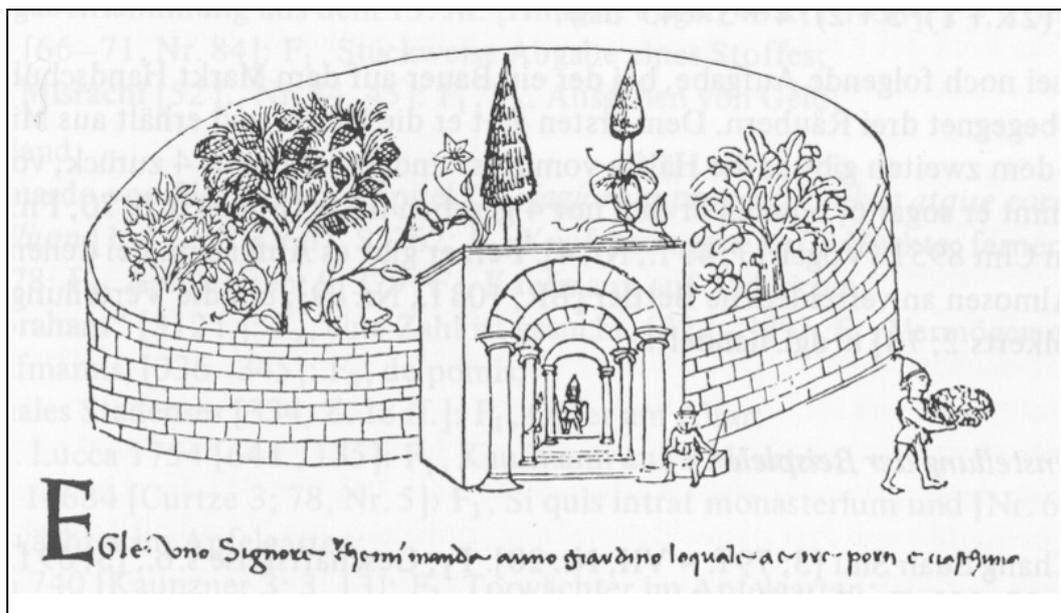
Löwe, Wolf, Fuchs, Ziege (Tropfke 581 [F. Calandri 1491, 97v])

### 4.2.1.3 Schachtelaufgaben

#### 4.2.1.3.2 Schachtelaufgaben – Der Torwächter im Apfelgarten 1: Von Öpfeln eine besondere Zahl zu brocken (zu unbekannte Erbschaft)

„Es wurde ein Geselle von seiner Buhle [Liebsten] in einen Baumgarten geschickt, dass er ihr einen Apfel bringen sollt und nicht mehr. Und der selbige Garten hatte 3 Tore, und unter jedem war ein Thorwart [Torwärter] und ein Knecht. Und wann er wieder aus dem Garten gehen wollte, wie viel er dann Öpfel in dem Garten gebrochen [gebrockt] hatte, die [davon] soll er dann dem ersten Torwärter nach Gesetz der Herren den Halbteil geben und danach von seinem [verbliebenen] Teil des Torwärters Knecht auch einen Opfel; danach dem anderen Torwärter soll er [von dem], was er dann noch Öpfel hat, auch den halben Teil geben und aber dess[en] Knecht von seinem [verbliebenen] Teil einen Apfel. Des gleichen soll er dem dritten Torwärter [von] dem überblieben Teil den Halbteil auch geben und dem Knecht von seinem Teil auch einen Apfel. Und er soll dann noch nit mehr denn 1 Apfel haben und den seiner Buhle bringen, oder die Freundschaft wär aus. Rate, wie viel muss der Geselle am ersten der Öpfel brocken? Antwort, er muss 22 Öpfel brocken.“

(Linienrechenbuch, Tegernsee ~1480; Cgm 740, 28v-29r; Kaunzner 1970, 13)



(Tropfke 583 [Paolo Dagomari (1281-1374); D. E. Smith 1908, 438])

#### 4.2.1.3.2 Schachtelaufgaben – Der Torwächter im Apfelgarten 2

Von Opffen ein hinderer zal zebrechen: ...  
E S wurde ein gefelle von seine puelen  
In eine paringarten gestickt, das er  
z eine oppfel bringen solt, vnd mit mer, vnd  
der selb gartt hat. 3. Thor, vnd vnder yetlichem  
Wer am Thorwart, vnd am knecht, vnd wann  
er wider auf dem gartn gen vort, wievil er  
dan oppfel in dem gartn gebroden hette, die soll  
er dem dem ersten thorwart nach gesetz der heren  
den halbtail geben, vnd darnach von seine tail  
des thorwarts knecht auch am oppfel, Darnach  
dem andern thorwart sol er was er danoch  
oppfel hat auch den halbn tail geben, vnd aber  
des knecht von seine tail am oppfel, Vn gleich  
sol er dem dritten thorwart den vberbleiben  
tail des halbtail auch geben, vnd dem knecht  
von seine tail auch am oppfel, vnd er soll danoch  
mit mer dan .j. oppfel haben, vnd den seine hiler,  
bringen, oder die frundtschaft wer auß, hatte  
wievil muess der gefelle am ersten der oppfel  
brechen, Antwort, er muess .22. oppfel brechen,  
vnd hat sonst kein zal mer dan .14. beleiht,  
nicht vber, von .38. beleiht .3. vber.

(Linienrechenbuch, Tegernsee ~1480; Cgm 740, 28v-29r)

### 4.2.1.3.2 Schachtelaufgaben – Der Torwächter im Apfelgarten 3

Der Garten ohne die Buhle findet sich auch bei Widmann (Widmann 1489, 101-101v; Gärtner 2000, Nr. 173, p. 421). Die Aufgabe gibt es ähnlich in dem Gewand, dass einer auf den Markt geht, Geld einsetzt und gewinnt, das wiederholt tut und das Ausgangskapital ermittelt werden soll (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 114, 115, 185, 187, 352).

Die Angabe der Lösung erfolgt im Text ohne weitere Erklärung. Um sie nachzuvollziehen, braucht man eine Gleichung mit einer Unbekannten.

Sei also  $x$  die Anzahl Äpfel, die der Gesell pflücken muss.

Am ersten Tor gibt er davon die Hälfte und einen weiteren ab, also  $x/2+1$ ; diese Menge wird mit  $a$  abgekürzt.

Es bleiben ihm  $x-(x/2+1) = x/2-1 = x/2+1-1-1 = a-2$ .

Davon gibt er am zweiten Tor wieder die Hälfte und einen weiteren ab, also  $(a-2)/2+1 = a/2$ ; es verbleiben ihm  $a-2-a/2 = a/2-2$ .

Davon gibt er am dritten Tor wieder die Hälfte und einen weiteren ab, also  $(a/2-2)/2+1 = a/4$ ; es verbleiben ihm  $a/2-2-a/4 = a/4-2$ .

Der verbleibende Rest am dritten Tor muss gleich dem einen Apfel sein, den der Gesell seiner Buhle bringen soll, also  $a/4-2 = 1$ .

Das liefert  $a = 12$ . Mit  $x/2+1 = a = 12$  erhält man  $x = 22$ .

Dahinter steckt das allgemeine Prinzip, dass der Gesell am  $n$ -ten Tor  $a/2^{n-1}$  Äpfel abgibt, die er ggf. mit dem Messer teilen muss, und ihm  $a/2^{n-1}-2$  verbleiben.

Der Text erwähnt noch „von 14 bleibt nichts über, von 38 bleibt 3 über“.

Allgemein bleiben von  $14+8k$  Äpfeln  $k$  Äpfel übrig.

Das sieht man, wenn man den verbleibenden Rest am dritten Tor  $a/4-2 = k$  setzt.

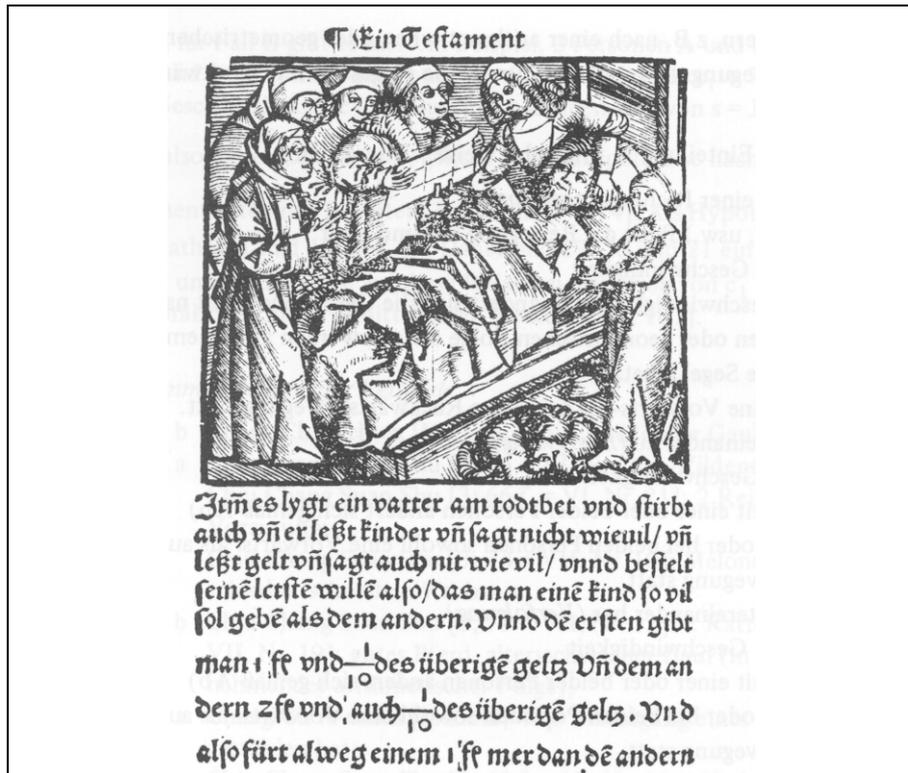
Das liefert  $a = 4k+8$ .

Mit  $x/2+1 = a = 4k+8$  erhält man  $x = 2(4k+7)$ .

#### 4.2.1.3.5 Schachtelaufgaben – Die unbekannte Erbschaft

„Es liegt ein Vater am Tot[en]bett und stirbt auch und er [hinter]lässt Kinder und sagt nicht wieviel. Und [hinter]lässt Geld und sagt auch nicht wieviel. Und bestellt seinen letzten Willen also, dass man einem Kind so viel soll geben als dem andern. Und dem ersten gibt man 1 fl und 1/10 des übrigen Gelds. Und dem andern 2 fl und auch 1/10 des übrigen Gelds. Und also fort alweg einem 1 fl mehr denn dem andern und 1/10 des übrigen. Nun ist die Frag, wie viel der Kinder und wie viel der fl gewest sein ...“

(Widmann 1489, 145-145v; Gärtner 2000, Nr. 237, p. 452-453)



(Tropfke 589 [Widmann (1489) 1508, 97v])

Ebenso: „Ein Mann hat Söhn, und man weiß nicht, wie viel ihr sind, und hat fl liegen in einer Wechselbank, und man weiß auch nicht, wie viel ihr sein. Nun sendt er den ältesten Sohn in die Bank und heißt ihn nehmen voraus 1 fl und das 10-Teil aller fl, die da bleiben ...“ (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 114; p. 64).

Ansatz: Das erste Kind bekommt so viel wie das zweite; Vermögen x.

$$1 + \frac{1}{10}(x-1) = 2 + \frac{1}{10}(\frac{9}{10}(x-1) - 2) \quad \text{übrig nach dem ersten: } (x-1) - \frac{1}{10}(x-1)$$

$$100 + 10(x-1) = 200 + 10(\frac{9}{10}(x-1) - 2)$$

$$10x - 10 = 100 + 9x - 9 - 20$$

$$x = 100 - 9 - 20 + 10 = 81$$

Das erste (bzw. jedes) Kind bekommt  $1 + \frac{1}{10}(81-1) = 9$  [fl], also sind es 9 Kinder.

Ähnlich mit Töchtern: „Ein man hat Tochter, und die erst nimmt 1 fl und den 6 Teil als oben ...“ (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 115, p. 65).

#### **4.2.1.4 I A c Bewegungsaufgaben (ein Akteur vor und zurück)**

##### **Taube im intermittierenden Sturzflug von einem Turm; Löwe im Brunnen 1**

„Es war ein Turm, der ist 10 Ellen hoch, und es ist eine Taube und fliegt all Tag herab  $\frac{2}{3}$  einer Ellen und fliegt wieder hinauf  $\frac{1}{4}$  [+]  $\frac{1}{3}$  einer Ellen. Nun frag ich, in wie viel Tagen die Taub auf die Erden kumpt [kommt]. Et fac sic: Zeuch ab [subtrahiere]  $\frac{1}{3}$  [+]  $\frac{1}{4}$  von  $\frac{2}{3}$ , est  $\frac{1}{12}$  einer Ellen, und also viel fliegt die Taub herab all Tag. Nunc dic: 10 mol [mal] 12 est 120; in so viel Tagen kumpt sie herab auf die Erden.“

(AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 65; p. 47)

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$  Ellen hinauf,  $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$  hinunter, macht  $\frac{1}{12}$  Ellen hinunter pro Tag; die Taube braucht für die 10 Ellen Turmhöhe also 120 Tage.

Dies ist aber zu einfach. Richtig sind 113 Tage:  $112 \cdot \frac{1}{12} = \frac{28}{3} = 9 \frac{1}{3} = 10 - \frac{2}{3}$ . Denn sonst würde die Taube ab dem 114. Tag ein Stück in den Boden hinein fliegen und dann wieder nach oben. Siehe Formel bei Ries' Schnecke.



##### **Löwe im Brunnen**

Diese Aufgabe ist auch unter dem Namen „Der Löwe im Brunnen – De leone in puteo“ bekannt, der von Leonardo (Fibonacci) von Pisa stammt (Liber abbaci 1202, ed. Boncompagni 1857, 177). Der Löwe, der täglich  $\frac{1}{7}$  Handbreit höher kommt, aber täglich wieder  $\frac{1}{9}$  Handbreit abrutscht, kommt glücklich nach 1575 Tagen aus dem Brunnen, wenn er bis dahin nicht verhungert ist.

##### **Schlange in der Höhle**

Das Problem findet sich schon bei Brahmagupta (ed. Colebrooke 1817, 283), Mahavira (ed. Rangacarya 1912, 89-90) und im Columbia-Algorithmus (ed. Cowley 1923, Kap. 67). In einer Variante von Mahavira kriecht eine Schlange in eine Höhle. Wann ist sie drinnen, wenn ihr Schwanz täglich um eine bestimmte Länge wächst? (Vogel 1954, 177 und 224)

#### 4.2.1.4 I A c Bewegungsaufgaben (ein Akteur vor und zurück)

##### Taube im intermittierenden Sturzflug von einem Turm; Löwe im Brunnen 2

Es ist geradezu unglaublich, mit welchem Phantasie\_reichtum zum mathematischen Problem der Vor- und Rückwärtsbewegung Geschichten erfunden wurden.

##### **Wurzelgraberin**

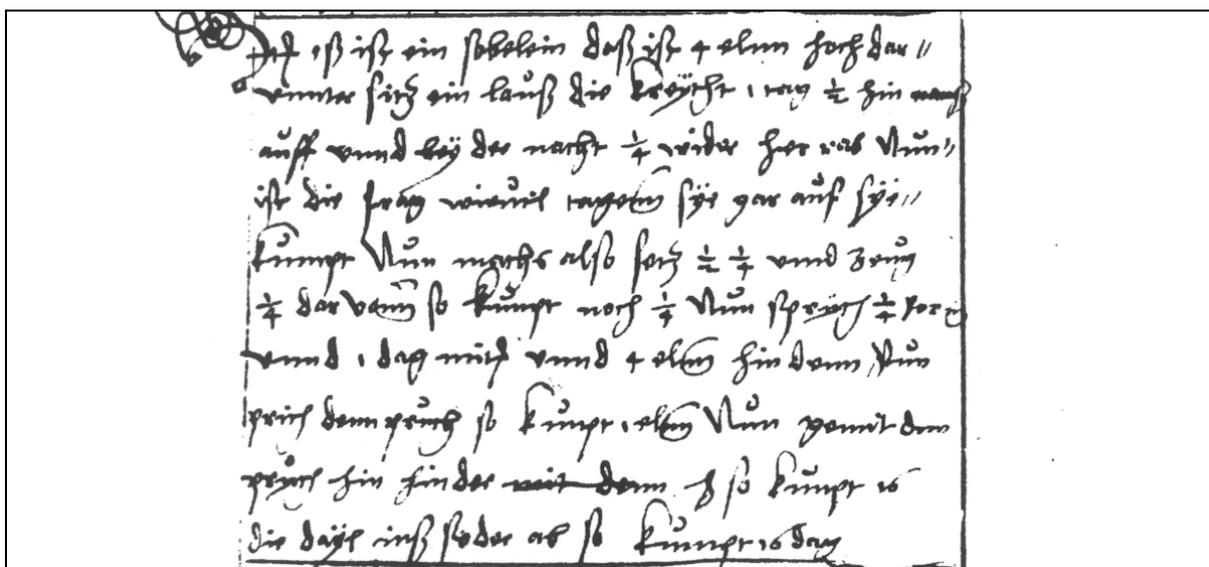
Mit den gleichen Zahlenwerten und dem gleichen Fehler wie die Taube: „Es ist ein Berg, der ist 10 Ackerläng hoch. Auf dem ist eine alte Wurzelgraberin, die sucht alle Tag herab  $\frac{2}{3}$  einer Ackerläng und steigt wieder hinauf alle Tag  $\frac{1}{3}$  einer Ackerläng und  $\frac{1}{4}$ . Nun ist die Frag, in wie viel Tagen sie hernieder von dem Berg auf die Erd komm. Facit 120 Tag“ (Widmann 1489, 235-235v; Gärtner 2000, Nr. 383, p. 511).

##### **Laus am Säbel**

Jorg Weltzell lässt eine Laus an einem Säbel auf und ab krabbeln:

„Item. Es ist ein Säbelein, das ist 4 Ellen hoch. Darunter sitzt ein Laus, die kreucht 1 Tag  $\frac{1}{2}$  hinauf, und bei der Nacht  $\frac{1}{4}$  wieder herab. Nun ist die Frag, [in] wie viel Tagen sie gar auf sie kommt. Nun mach's also: Setz  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ , und zieh  $\frac{1}{4}$  davon, so kommt noch  $\frac{1}{4}$ . Nun sprich  $\frac{1}{4}$  vorn und 1 Tag [als] Mittleres und 4 Ellen hinten. Nun brich den Bruch, so kommt 1 Elle. Nun geh [?] mit [?] dem Bruch hin hinter, so kommt 16 die teil ins vorder ab, so kommt 16 Tag.“

(Weltzell 1523; UB München 4° Cod. ms. 718, 83v)



Rechenweg:  $\frac{1}{4}$  Elle : 1 Tag = 4 Ellen : x  $\rightarrow$  x = 16 Tage

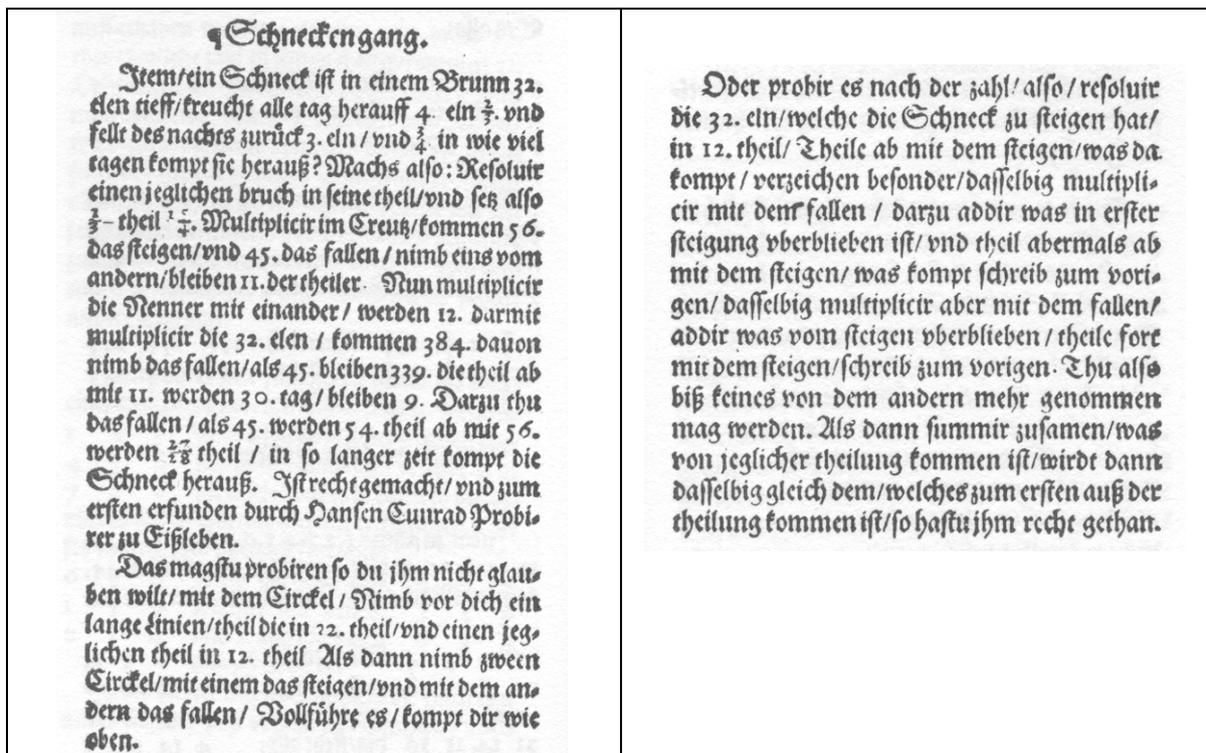
Richtig sind 15 Tage:  $14 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{2} = 4 - \frac{1}{2}$ . Sonst würde die Laus am 16. Tag ein Stück in die Luft krabbeln.

#### 4.2.1.4 I A c Bewegungsaufgaben (ein Akteur vor und zurück)

#### Taube im intermittierenden Sturzflug von einem Turm; Löwe im Brunnen 3

#### Schnecke im Brunnen

Adam Ries lässt statt des Löwen eine Schnecke aus dem Brunnen emporklettern: „Item. Ein Schneck ist in einem Brunn, 32 Ellen tief, kriecht alle Tag herauff 4  $\frac{2}{3}$  Ellen und fällt des Nachts zurück 3  $\frac{3}{4}$  Ellen. In wie viel Tagen kommt sie heraus?“ (Ries 1574, 72v-73).



Adam Ries selbst verrechnet sich in der ersten Auflage 1522 und lässt sich von Hans Cunrad helfen (Prinz, 2009, 180). Die für heutige Begriffe umständlich wirkende Lösung sei hier moderner formuliert.

Resultierende tägliche Steigstrecke = Tagstrecke – Nachtstrecke:

$$4 \frac{2}{3} - 3 \frac{3}{4} = \frac{14}{3} - \frac{15}{4} = \frac{(56 - 45)}{12} = \frac{11}{12} \text{ [Ellen]}$$

Sei nun  $x$  (ganze Zahl) die Anzahl der ganzen Tage mit Tagstrecke und Nachtstrecke. Am  $(x+1)$ -ten Tag wird der Rest bis zum Ende der Gesamtstrecke zurückgelegt. Dann

$$(\text{Tagstrecke} - \text{Nachtstrecke}) \cdot x + \text{Tagstrecke} \geq \text{Gesamtstrecke}$$

$$\frac{11}{12} x + 4 \frac{2}{3} \geq 32 \rightarrow \frac{11}{4} x \geq 96 - 14 = 82 \rightarrow x \geq \frac{328}{11} = 29 \frac{9}{11}$$

Also bekommt man  $x = 30$ . In 30 Tagen werden  $30 \cdot \frac{11}{12} = 5 \cdot \frac{11}{2} = 27 \frac{1}{2}$  Ellen zurückgelegt. Es fehlen noch  $4 \frac{1}{2}$  Ellen bis zur Gesamtstrecke von 32 Ellen, das ist weniger als die Tagstrecke von  $4 \frac{2}{3}$  Ellen. Mit dem Dreisatz erhält man

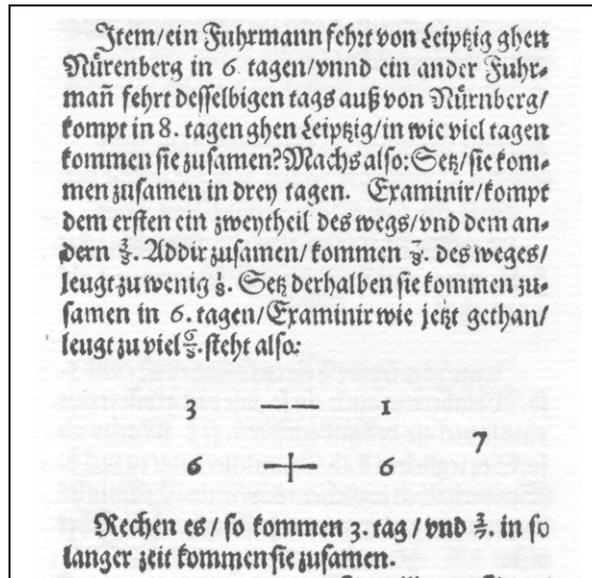
$$4 \frac{2}{3} : 1 = 4 \frac{1}{2} : y \rightarrow 28 : 1 = 27 : y \rightarrow y = \frac{27}{28}$$

Diese Lösung ist aber auch nicht sinnvoll, da (Licht-)Tag und 24h-Tag zweierlei sind. Rechnet man mit 12h Licht-Tag, ergibt sich eine Zeit von  $30 \frac{27}{56}$  24h-Tagen.

#### 4.2.1.4 I B Begegnungsaufgaben 1: Zwei Fuhrleute begegnen sich

„Item. Ein Fuhrmann fährt von Leiptzig gen Nürnberg in 6 Tagen und ein ander Fuhrmann fährt desselbigen Tags aus von Nürnberg, kommt in 8 Tagen gen Leiptzig“. In wie viel Tagen kommen sie zusammen? Mach's also ...“

(Ries 1574, 68)



Lösung:

Entfernung von Leipzig nach Nürnberg: 1 (gesetzt); Geschwindigkeiten:  $\frac{1}{6}$  und  $\frac{1}{8}$ .

$$v = s/t \rightarrow t = s/v$$

Beide fahren die gleiche Zeit, bis sie zusammenkommen; der erste legt dabei die Strecke  $s$  zurück; also:

$$t = s_1/v_1 = s_2/v_2$$

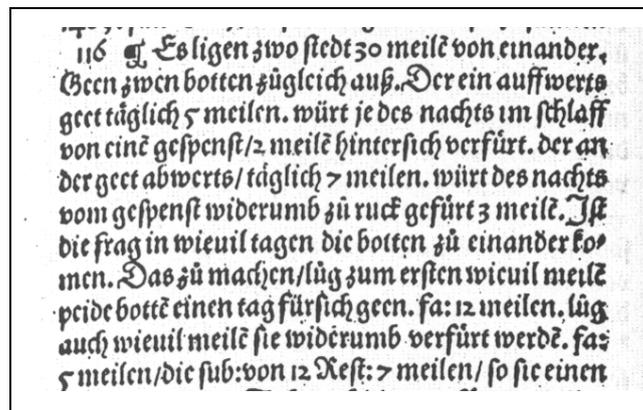
$$t = s/(1/6) = (1-s)/(1/8) \rightarrow 6s = 8 - 8s \rightarrow 14s = 8 \rightarrow s = 4/7$$

$$t = s/v = (4/7)/(1/6) = 24/7 = 3 \frac{3}{7} \text{ [Tage]}$$

#### 4.2.1.4 I B Begegnungsaufgaben 2: Zwei Boten und ein Gespenst

„Es liegen zwei Städte 30 Meilen von einander, gehen zwei Boten zugleich aus. Der eine aufwärts geht täglich 5 Meilen, wird je des Nachts im Schlaf von einem Gespenst 2 Meilen hinter sich verführt. Der ander geht abwärts täglich 7 Meilen, wird des Nachts vom Gespenst wiederum zurückgeführt 3 Meilen. Ist die Frag, in wie viel Tagen die Boten zu einander kommen.“

(Rudolff 1525, M 8-8v, Nr. 116)



Lösung: Entfernung 30 Meilen

Resultierende Geschwindigkeiten:  $v_1 = 5 - 2 = 3$  [M/d];  $v_2 = 7 - 3$  [M/d]

$$t = s_1/v_1 = s_2/v_2$$

$$t = s/3 = (30-s)/4 \rightarrow 4s = 90 - 3s \rightarrow 7s = 90 \rightarrow s = 90/7$$
 [M]

$$t = s/v = (90/7)/3 = 90/21 = 30/7 = 4 \frac{2}{7}$$
 [Tage]

Das ist aber falsch, da die Tagesgeschwindigkeit höher ist als die resultierende; die beiden Boten treffen sich also schon einen Tag früher, nämlich am 4. Tag, ohne dass das Gespenst noch ein viertes Mail in Aktion tritt.

Zustand am 4. Tag morgens

Bote 1:  $3 \cdot 3 = 9$  Meilen gegangen; Bote 2:  $3 \cdot 4 = 12$  Meilen gegangen

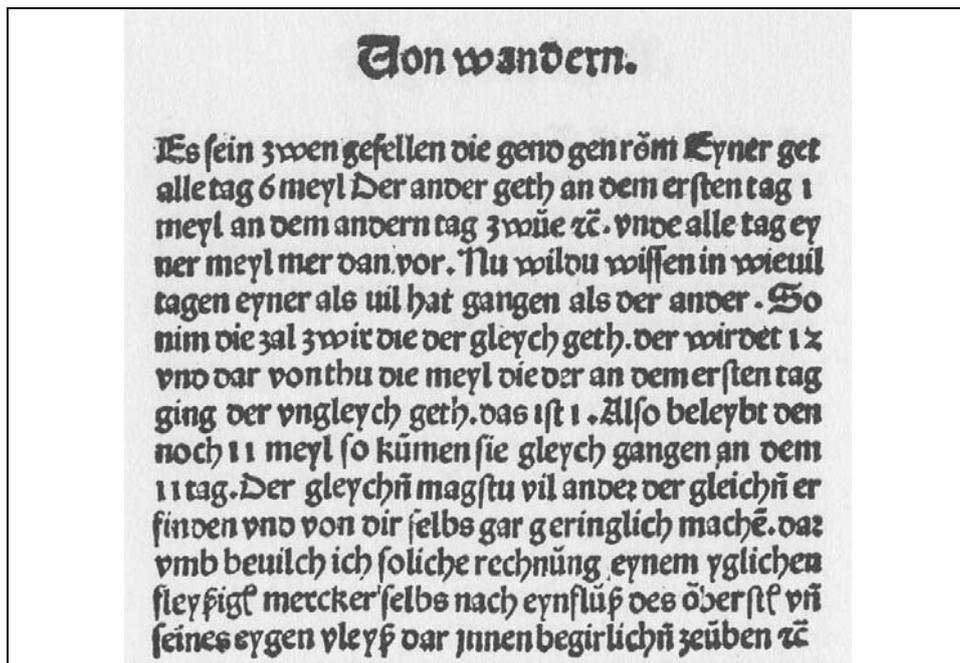
Restliche Entfernung:  $30 - 12 - 9 = 9$  [Meilen]

Bei Tagesgeschwindigkeiten von 5 und 7 Meilen/Tag (summiert 12 Meilen/Tag) sind die restlichen 9 Meilen gerade  $3/4$  der gesamten Tagesleistung der beiden Boten. Sie treffen sich also nach  $3 \frac{3}{4}$  Tagen.

#### 4.2.1.4 I C Verfolgungsaufgaben 1: Vom Wandern (arithmetische Reihe)

„Es sind zwei Gesellen, die gehen nach Rom. Einer geht alle Tage 6 Meilen. Der andere geht am ersten Tag 1 Meile, am zweiten Tag zwei etc. und alle Tage eine Meile mehr als zuvor. Nun willst du wissen, in wie viel Tagen einer soviel gegangen ist wie der andere. So nimm die Zahl zweifach von dem, der gleich geht, daraus wird 12. Und davon tu die Meilen weg, die der am ersten Tag ging, der ungleich geht; das ist 1. Also bleiben dann noch 11 Meilen. So kommen sie gleich gegangen am 11. Tag.“

(Wagner 1483; Schröder 1988, 112, 223)



Ähnlich: „Sint duo ad Romam vel alias ituri ...“ (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 53-56; p. 43-44, lat.).

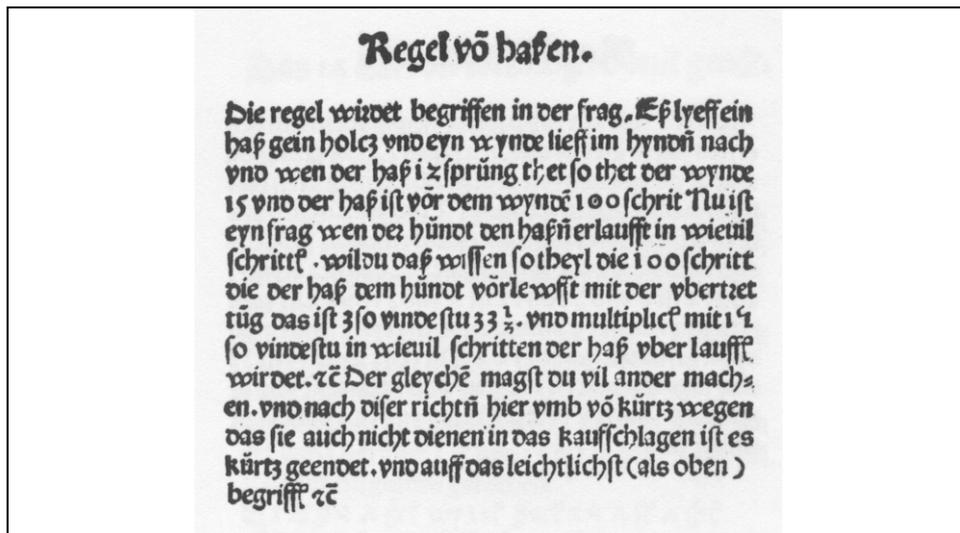
Die angegebene Lösung versteht man erst dann, wenn man eine Gleichung mit einer Unbekannten aufstellt. Sei also  $x$  die Anzahl Tage, bis beide Wanderer den gleichen Weg zurückgelegt haben. Der erste ist bis dahin  $6x$  Meilen gegangen, der zweite  $(1+x)x/2$ . Gleichgesetzt und durch  $x$  dividiert, verbleibt  $6 = (1+x)/2$ . Dann kann man den Text weiterlesen (Multiplikation mit 2 etc.).

Hier sei die Wegstreckenformel für den zweiten Wanderer am Beispiel  $x = 8$  illustriert. Wie weit geht er an 8 Tagen?  $1+2+3+4+5+6+7+8$  Meilen. Jetzt vertauscht man die Summanden: erster, letzter, zweiter, vorletzter, dritter, drittletzter etc. und fasst sie zu Paaren zusammen:  $(1+8)+(2+7)+(3+6)+(4+5)$ . Jedes Summandenpaar hat den Wert 9, und es gibt 5 Summandenpaare. Die allgemeine Formel für eine sog. arithmetische Reihe heißt also: Erster plus letzter Summand  $(1+x)$  mal die halbe Anzahl der Summanden  $(x/2)$ .

#### 4.2.1.4 I C Verfolgungsaufgaben 2: Hase und Hund 1

„Die Regel wird [ein]begriffen in der Frag: Es lief ein Has gen ein Holz und ein Hund lief ihm hinten nach. Und wenn der Has 12 Sprüng tat, so tat der Hund 15. Und der Has ist vor dem Hund 100 Schritt. Nun ist ein Frag: Wenn der Hund den Hasen erläuft, in wie viel Schritten? ...“

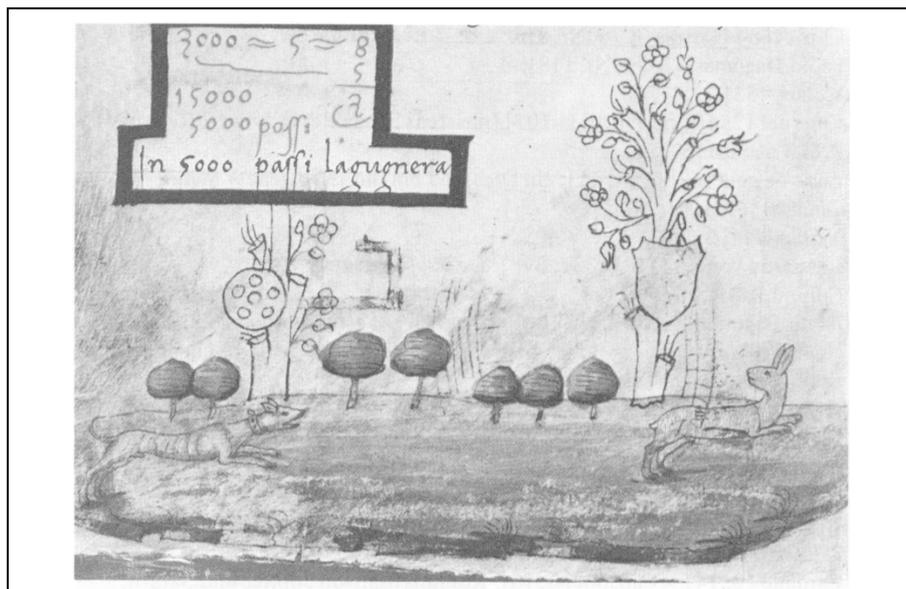
(Wagner 1483; Schröder 1988, 113, 223-224)



Sprungweite von Hase und Hund wird als gleich angenommen.

3 Schritt näher  $\equiv$  15 Sprünge, also 100 Schritt näher  $\equiv$   $100/3 \cdot 15$  Sprünge.

Ähnlich: „Sit quidam venator ...“ (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 33; p. 37).



(Tropfke 597 [F. Calandri 1491, 92v])

#### 4.2.1.4 I C Verfolgungsaufgaben 2: Hase und Hund 2

<p>¶ Item ein hunde laufft einē Hasen nach/ vnd der Hasß hat 30 sprüing beuor. Vnd als vffte d̄ Hasß 6 sprüing thut/ thut der hunde 8 sprüing/ Ist die Frage in wie viel sprüingen ereylyt der hunde den hasen. Subtra. 6 von 8/bleiben 2. Sprich 2 wer den einbracht von 8 / von wie vielen werden 30 einbracht. Facit 120. In so viel sprüingen ereylyt der hunde den Hasen.</p>	
<p>¶ Item ein hunde laufft einē Hasen nach/ der Hasß hat 50 sprüing beuor. Vñ als vffte der Hasß 4 sprüing thut/ thut der hunde nie mehr als 3. Vnd 2 hunds sprüing thuen als viel als 3 Hasen sprüing. Ist die frag in wie viel sprüingen ereylyt der hunde den Hasen. Sprich 2 hunds sprüing gebenn 3 Hasenn sprüinge / wie viel geben 3 hunds sprüinge. Facit 4 <math>\frac{1}{3}</math>. Sprich <math>\frac{1}{3}</math> Hasen sprüing wird von 3 hunds sprüingen einbracht / von wie</p>	<p>viel werden 50 sprüing einbracht. Facit in 300 sprüingen.</p>

(Apian 1527, N1-1v)

#### 4.2.1.4 I C Verfolgungsaufgaben 3: Hase und Hund in einfacherem Gewand

„Item. Ein Bote geht alle Tage 7 Meilen wegs und ist schon 64 Meilen gangen. So will sein Herr noch einen Boten hinach schicken, der gehet alle Tage 9 Meilen. Ist die Frage: In wie viel Tagen ereilt er den ersten Boten? Mach’s also: Subtrahir 7 von 9 bleiben 2, dividir 64 in 2. Facit 32 Tage, daran erholt der ander den ersten.“

(Apian 1527, M 8v)

<p>¶ Item ein bot geht alle tage 7 meylwegs vnd ist schon 64 meilen gangen/ so wil sein Herr noch einen boten hinach schicken/ der gehet alle tage 9 maylen Ist die frage in wie vil tagen ereylyt er den ersten boten. Machs also subtrahir 7 vonn 9 bleiben 2/ diuidir 64 in 2 facit 32 tage daran erholt der ander den ersten.</p>	
---	--

### 4.2.1.5 Diverse Probleme

#### 4.2.1.5.1 Diverse Probleme – Regula aequalitatis (Einkauf gleicher Mengen)

„Ingwer und Negelei

Item. Es gilt 1 lb Ingwer 11 gr und 1 lb Neglein

12 gr. Nu sollt pro 100 fl je eines so viel

kaufen als des andern. Willtu nun wissen,

wie viel lb jedes nehmen sollt, das gerad

für dein Geld sei. Mach's also: Addir 11 und

12, facit 23. Sprich: 23 gr geben 1 lb, was

geben 100 fl? Die fl mach zu gr und das

dividir per 23, facit 86 lb  $\frac{22}{23}$  [nicht  $\frac{22}{33}$ ] und so viel solltu

jeglich haben. Willtu probiren, setz

also: 1 lb Ingwer um 11 gr, wie 86  $\frac{22}{23}$ ?

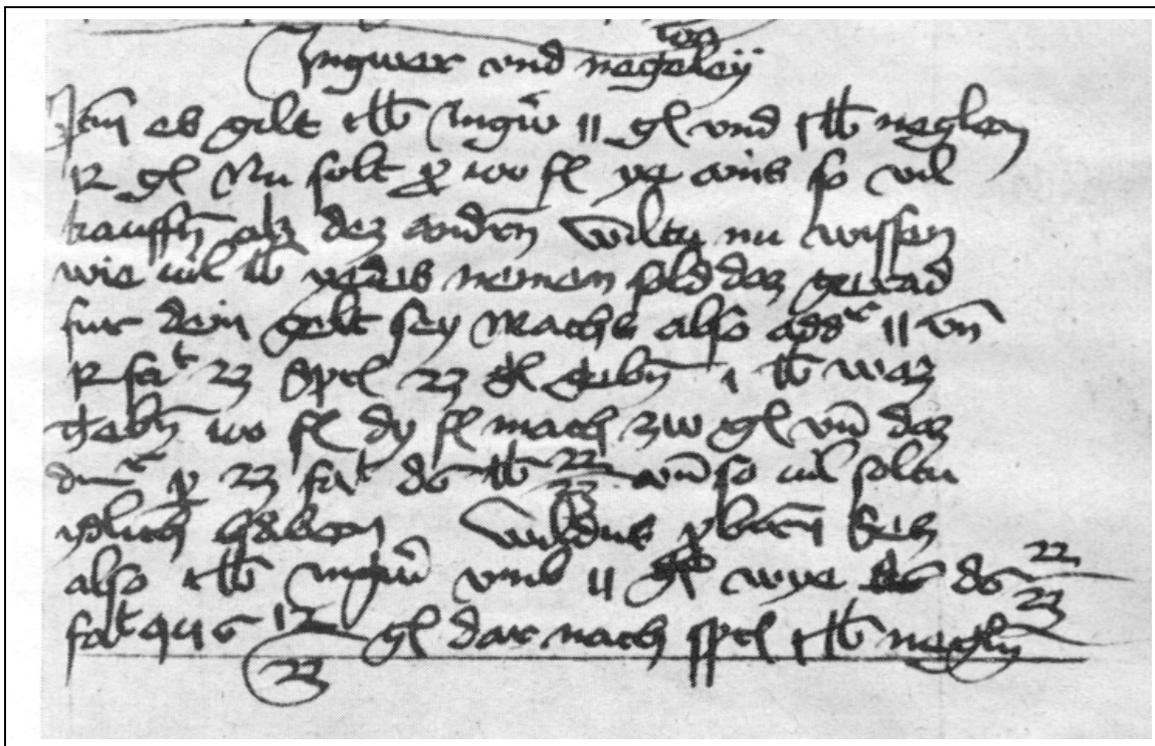
Facit 956  $\frac{12}{23}$  gr. Darnach sprich: 1 lb Neglein

um 12 gr, wie 86  $\frac{22}{23}$ ? Facit 1043 [nicht 1047] gr  $\frac{11}{23}$ .

Nu addir die gr zusamm, facit 2000 gr, ist

gleich 100 fl in Gold.“

(AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 92; p. 56-57; Tafel IV; Clm 14908, 79)



(= Widmann 1489, 90v-91; Gärtner 2000, Nr. 136, p. 413)

Anmerkung: 1 fl = 20 gr

#### **4.2.1.5.2 Diverse Probleme – Zu viel, zu wenig (Regula augmenti et decrementi)**

„Einer hat Geld bei ihm und will Tuch kaufen. Und wenn er 3 lb gibt pro 1 Ellen, so mangelt er 4 lb am Zahlen. Und wenn er 2 lb gibt pro 1 Ellen, so bleibt ihm 10 lb über. Queritur, was 1 Ellen hab golten, und wie viel Geldes bei ihm hat.

Mach's also: Nehmen wir [an], das das Stück [Tuch, also die Anzahl Ellen] sei 1 Ding [cosa, Unbekannte] gewesen. [Im Folgenden wird berechnet, wie viel Geld er bei sich hat.] Und er gibt 3 lb pro 1 Ellen. Sprich 3 mol 1 $\partial$  ist 3 $\partial$  | minus 4 lb, darum dass er spricht, er mangelt 4 lb am Zahlen, darum kommt 3 $\partial$  minus 4 lb. Nu sprich 2 mol 1 $\partial$  ist 2 $\partial$  und 10 lb mehr, darum dass er spricht, ihm bleibt 10 über. Nun ist 3 $\partial$  minus 4 lb dem andern gleich, das ist 2 $\partial$  10 mer ...“

(Dt. Algebra, 1461; Clm 14908, 144r-144v; Curtze 1895, 57; Dublette mit gleichem Wortlaut, aber nicht algebraischer Lösung: 46v; Curtze 1895, 39-40)

$3x - 4 = 2x + 10$  liefert  $x = 14$  Ellen

$14 \text{ Ellen} \cdot 2 \text{ lb/Elle} + 10 \text{ lb} = 38 \text{ lb}$

Ähnlich: „Einer will ein Sack mit Anis kaufen. Und wenn er für jeglichs lb 12 pf gibt so bleiben ihm übrig 37 pf. So er aber für ein 1 lb 15 pf gibt, so zerrinnt ihm 44 pf ... (Widmann 1489, 112-112v; Gärtner 2000, Nr. 182, p. 429). Lösung: 361 pf und 27 lb.

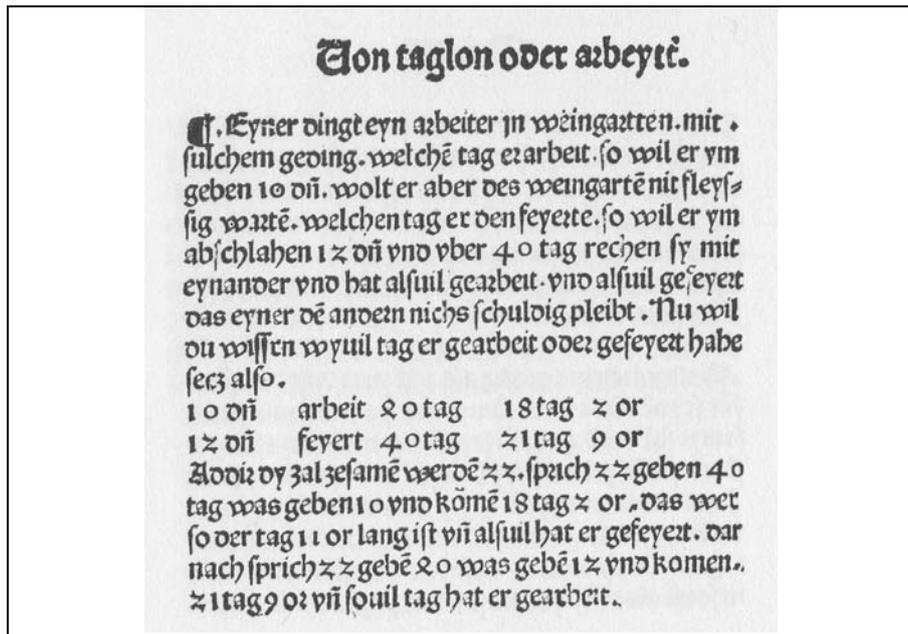
#### **Frau mit Feigen und Kindern**

„Ein Frau hat Feigen und hat auch Kinder, und sie gibt jeglichem Kind 12 Feigen, so bleibt ihr 37 Feigen ... und gibt jeglichem Kind 15 Feigen, so zerrinnt ihr 44 Feigen ...“ (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 158, p. 75). Lösung: 27 Kinder und 361 Feigen.

#### 4.2.1.5.4 Diverse Probleme – Der faule Arbeiter: Von Tagelohn oder Arbeit 1

„Einer dingt einen Arbeiter im Weingarten mit solchem Geding: Welchen Tag er arbeitet, so will er ihm geben 10 dn [denarii, Pfennige]. Wollte er aber den Weingarten nicht fleißig warten, welchen Tag er dann feierte, so will er ihm abziehen 12 dn. Und über 40 Tage rechnen sie miteinander, und hat so viel gearbeitet und soviel gefeiert, dass einer dem anderen nichts schuldig bleibt. Nun willst du wissen, wie viele Tage er gearbeitet oder gefeiert hat.“

(Wagner 1483; Schröder 1988, 98, 216)



Ebenso: „Einer dingt ein Arbeiter in einem Weingarten mit solchem Geding ...“ (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 183; p. 86; Clm 14908, 100v).

Der Arbeiter habe  $x$  Tage gearbeitet und  $40-x$  Tage gefeiert. Für die gearbeiteten Tage bekommt er  $10x$  Pfennige, für die gefeierten verliert er  $12(40-x)$ . Lohn minus Verlust soll 0 ergeben, also  $10x + 12x - 480 = 0$  und daraus  $x = 480/22 = 240/11 = 21 \frac{9}{11}$ . Bei der im Text angegebenen Arbeitszeit von 11 Stunden pro Tag hat der Arbeiter also 21 Tage 9 Stunden gearbeitet und 18 Tage 2 Stunden gefeiert.

Die Lösung im AR teilt die 40 Tage im Verhältnis von Tagelohn 10 dn und Tagesabzug 12 dn. Dazu werden die 40 Tage in  $10 + 12 = 22$  Teile zerlegt.

Tagelohn  $\sim 1/\text{Zeit}$  (umgekehrt proportional)

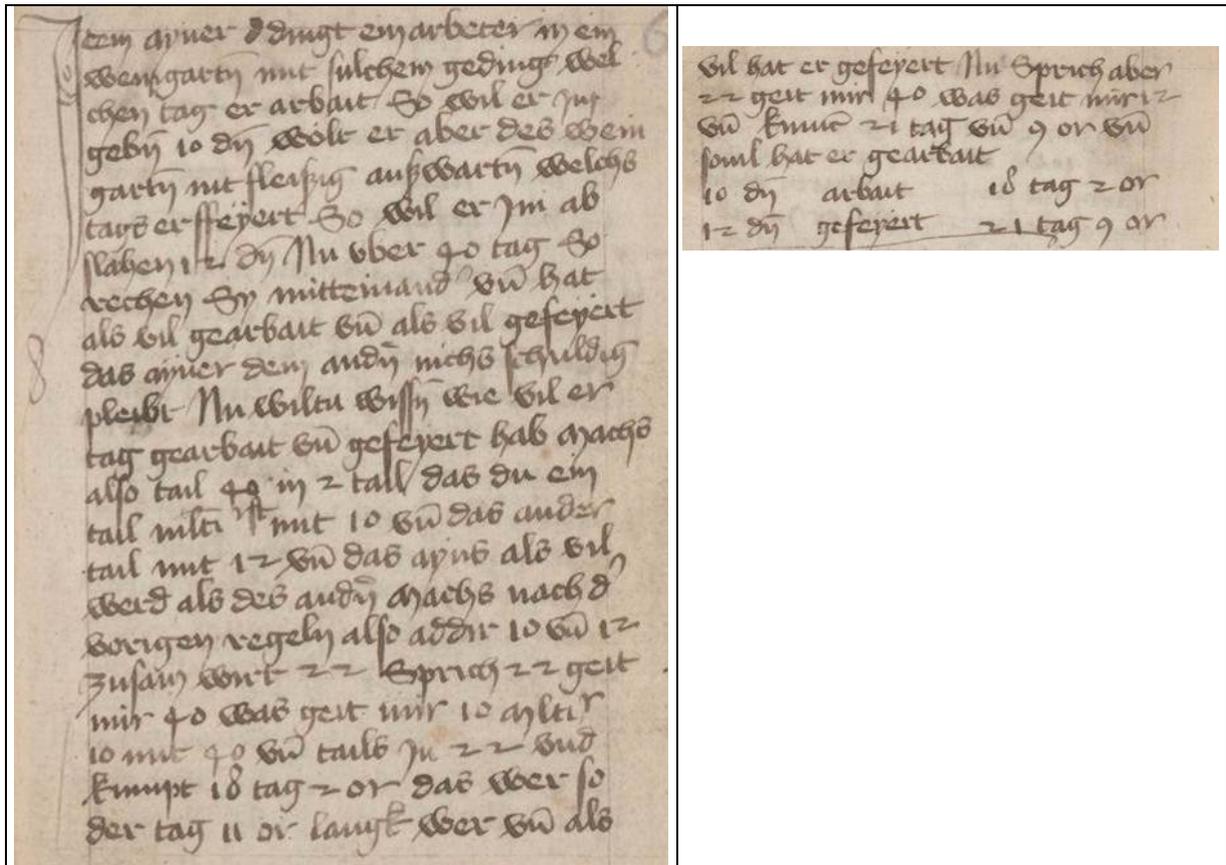
Der zum – kleineren – Lohn gehörige Zeitanteil muss größer sein und entspricht 12 Teilen:

$$12 \cdot 40/22 = 240/11 = 21 \frac{9}{11}.$$

Der zum – größeren – Abzug gehörige Zeitanteil muss kleiner sein und entspricht 10 Teilen:

$$10 \cdot 40/22 = 200/11 = 18 \frac{2}{11}.$$

**4.2.1.5.4 Diverse Probleme – Der faule Arbeiter: Von Tagelohn oder Arbeit 2**



(Ars arithmetica ~ 1480; Vind. 3029, 66-66v)

<p>Item/einer dingt einen Arbeyter 30. tag/          wenn er arbeyt so gibe er ihm sibem pfenning/          So er aber feiret/rechnet er ihm ab funff dz          vnnnd da die dreissig tag verschienen sind / ist          keiner dem andern schuldig blieben. Die frag          wie viel tag er gearbeyt/vnd auch wie viel tag</p>	<p>er gefeyert hab. Machs also: Setz/ er hab 15. tag          gearbeyt/vnd 15. gefeyert. Multiplicir 15. mit 7.          vnd 15. mit 5. kommen 105. vnd 75. nimb eins          vom andern/bleiben 30. so viel zu wenig. Setz          derhalben 10. tag gearbeyt/vnd 20. gefeyert/          examinir wie jekt/steht also:</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">15</td> <td style="text-align: center;">—</td> <td style="text-align: center;">30</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td style="text-align: right;">60</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">10</td> <td style="text-align: center;">+</td> <td style="text-align: center;">30</td> </tr> </table> <p>Machs/ so kommen 12½ tags/so viel hat er          gearbeyt/die nimb von 30. tagen/ bleiben 17½          tag/ so viel hat er gefeyert.</p>	15	—	30			60	10	+	30
15	—	30								
		60								
10	+	30								

(Ries 1574, 60v-61)

Ähnlich: „Ein Bürger zu Leipzig will ein Haus bauen und dingt mit den Arbeitern also ...“ (Widmann 1489, 142v-143v; Gärtner 2000, Nr. 234, p. 451).

## 4.2.2 Lineare Probleme mit mehreren Unbekannten

### 4.2.2.2 Die gefundene Börse

Zwei Personen bestimmen deren Inhalt im Vergleich zu ihrem eigenen Besitz (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 159, p. 76). Aber erst bei drei Personen ist die Lösung eindeutig (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 113, p. 63-64 und Nr. 227, p. 105).

### 4.2.2.3 Einer allein kann nicht kaufen:

#### Zwei wollen ein Pferd kaufen, doch das Geld jedes einzelnen reicht nicht

„Item. Zwei wollen ein Pferd kaufen, als A und B für 15 fl. Spricht A zum B: «Gib mir deines Gelds ein Drittel, so will ich meins dazu tun und das Pferd bezahlen». Spricht B zum A: «Gib mir von deinem Geld ein Viertel, so will ich mit meinem Geld hinzu getan das Pferd bezahlen». Nun frage ich, wie viel jeglicher in Sonderheit Gelds hab ...“

(Ries 1574, 61v-62)

<p>Item/ zween wollen ein Pferde kauffen/ Als A. vnd B. für 15. fl. Spricht A. zum B. gib mir deines geltts ein drittheil/ so wil ich meins darzu thun / vnd das Pferde bezahlen. Spricht B. zum A gib mir von deinem gelt ein viertheil/ so wil ich mit meinem gelt hinzu gethan das pferde bezahlen. Nun frage ich/ wie viel jeglicher in sonderheit geltts hab? Setze dem A. zwölff gülden / gebrechen ihm an der bezahlung 3. fl. welche den dritten theil vom B. machen / also muß</p>	<p>B. 9. haben. Examinir die also/ Sprich: der drittheil von B. sind 3. zu 12. des A. addirt/ kommen 15. bezahlung des Pferdes / Nun wil B. vom A. den vierdten theil haben/ als 3. fl. addir 3. zu 9. werden 12. leugt zu wenig 3. Setz derhalben A. hab 8. muß B. 21. haben. Examinir auch/ leugt zu viel 8. vnd steht also:</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">A.</td> <td style="text-align: center;">B.</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">12</td> <td style="text-align: center;">9</td> <td style="text-align: center;">—</td> <td style="text-align: center;">3</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: center;">11</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">8</td> <td style="text-align: center;">21</td> <td style="text-align: center;">X</td> <td style="text-align: center;">8</td> </tr> </table> <p>Rechen dem A. sein gelt zum ersten/ kommen 10. fl. vnd <math>\frac{10}{11}</math> theil/ darnach dem B. werden <math>12\frac{3}{11}</math> fl.</p>	A.	B.			12	9	—	3				11	8	21	X	8
A.	B.																
12	9	—	3														
			11														
8	21	X	8														

Lösung:

A habe a Gulden, B habe b Gulden.

$$(1) a + b/3 = 15$$

$$(2) a/4 + b = 15 \quad \rightarrow b = 15 - a/4$$

$$\text{In (1) } a + (15 - a/4)/3 = a + 5 - a/12 = 11/12 a + 5 = 15$$

$$a = 10 \cdot 12/11 = 120/11 = 10 \frac{10}{11} \text{ [fl]}$$

$$\text{In (2) } b = 15 - (120/11)/4 = 15 - 30/11 = 15 - 2 \frac{8}{11} = 12 \frac{3}{11}$$

#### 4.2.2.5 Zwei Becher und ein Deckel

„Es sein 2 Becher und zwischen ihnen liegt ein Überlid [Deckel], das ist [al]so schwer: Wenn ich's auf den ersten Becher leg, so wiegt der selbige Becher 9 mal schwerer denn der ander. Wenn ich's aber auf den andern Becher leg, so ist der ander Becher mit dem Überlid zu 7 mal schwerer denn der erst. Nu ist die Frag, wie schwer das Überlid ist ...“

(Widmann 1489, 146-146v; Gärtner 2000, Nr. 239, p. 453-454)

Mit gleichen Werten: „Item sint duo ciffi ...“ (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 78, p. 51).

Als ganzzahlige Lösung gibt Widmann an:  $l = 62, x = 10, y = 8.$

Die kleinste ganzzahlige Lösung ist:  $l = 31, x = 5, y = 4.$

Ries gibt das Gewicht des Deckels an, so dass die Lösung eindeutig wird.

<p>Item/einer hat zween silberne Becher/vnd ein oberlid/so dasselbig auff den ersten gesetzt wirdt / helt er viermal des andern gewichte. Wirdt es aber auff den andern gesetzt/so ist er dreymal schwerer dann der erste/vnd das oberlid wiegt 16 loth/wie viel wiegt ein jeglicher Becher in sonderheit? Machs also: Setz der erste hab gewogen zwölff loth / addir das oberlid/ als 16. werden 28. das were viermal mehr dann</p>	<p>der ander. Also muß der ander 7. loth haben am gewichte. Addir 16. zu 7 kommen 23. welche dreymal 12. machen solten/wirdt gebrechen an 13. Setz der examinirten ein andere/als 8 vnd procedir nach der auffgab / kompt minus 2. stehet also:</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">12</td> <td style="text-align: center;">—</td> <td style="text-align: center;">13</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="text-align: right;">II</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">8</td> <td style="text-align: center;">—</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td></td> </tr> </table> <p>Machs/kommen 7. loth/ <math>\frac{7}{1}</math>. so viel wiegt der erste. Such den andern wie gesagt/werden <math>5 \frac{2}{3}</math> loth. Oder machs durch sagung der falschen zahln sampt den lügen/ihm zugeeignet.</p>	12	—	13					II	8	—	2	
12	—	13											
			II										
8	—	2											

(Ries 1574, 64v-65)



(Tropfke 612 [Widmann (1489) 1508, 98v])

#### 4.2.2.6 Problem der 100 Vögel und Zehenaufgaben: Regula virginum 1

##### Zehenaufgabe

„12 Personen, Ritter, Knecht und Junckfraw, sollen teilen 12 Brote: einem Ritter 2 Brot, 1 Knecht  $\frac{1}{4}$ , einer Junckfraw  $\frac{1}{2}$  Teil. Queritur wie viel etc.? Responditur: 1 Junckfraw, 6 Knecht und 5 Ritter.“

(AR, 1460; Clm 14908, 85v; Vogel 1954, Nr. 121, p. 66 = Curtze 1894, 403)

Es seien  $x$  Ritter,  $y$  Knechte,  $12 - x - y$  Jungfrauen.

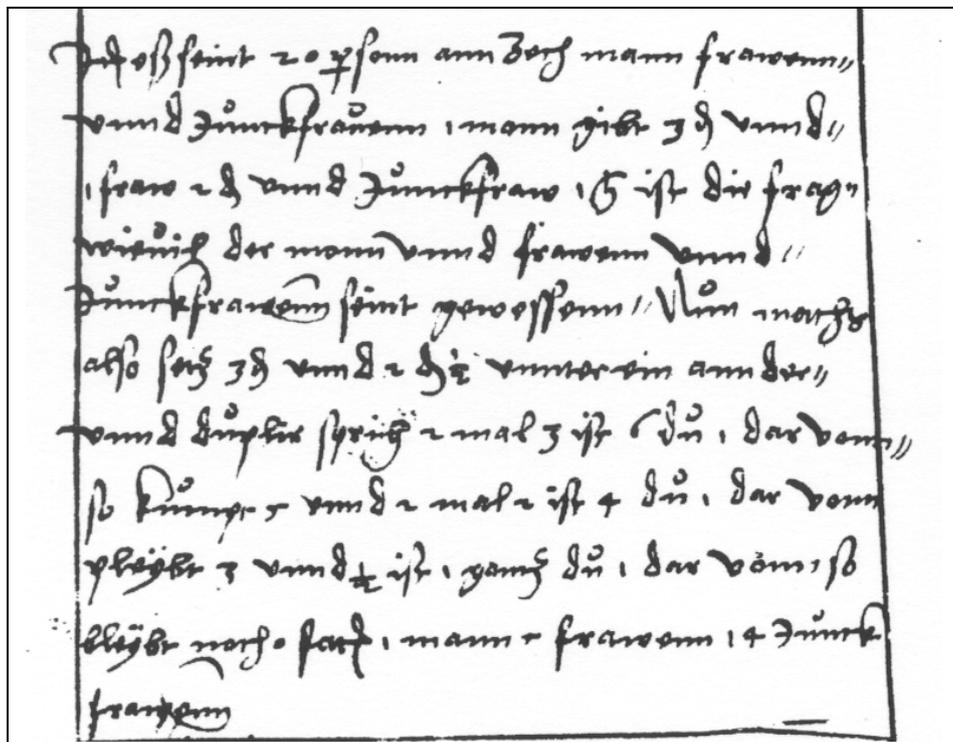
$$2x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}(12 - x - y) = 12 \quad \text{liefert } y = 6x - 24.$$

$$y > 0 \rightarrow x > 4$$

$$y < 12 \rightarrow x < 6$$

$$\text{Also } x = 5.$$

Ähnlich: „Item. Es seint 20 Personen an Zech, Mann, Frauen und Jungfrauen. 1 Mann gibt 3 pf und 1 Frau 2 pf und [1] Jungfrau  $\frac{1}{2}$  pf. Ist die Frag, wie viel der Mann und Frauen und Jungfrauen seint gewesen. Nun mach's also: Setz 3 dn und 2 dn  $\frac{1}{2}$  unter einander und duplier. Sprich 2 mal 3 ist 6 dn, 1 davon, so kommt 5. Und 2 mal 2 ist 4 dn, 1 davon, bleibt 3. Und  $\frac{1}{2}$  ist ein ganz dn, 1 davon, so bleibt noch 0. Facit 1 Mann, 5 Frauen, 14 Jungfrauen.“ (Weltzell 1523; UB München 4° Cod. ms. 718, 80v)



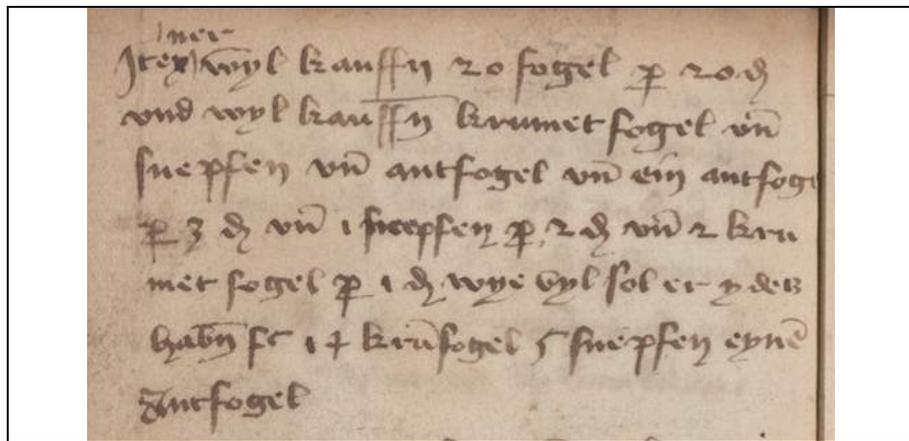
#### 4.2.2.6 Problem der 100 Vögel und Zehenaufgaben: Regula virginum 2

Die gleichen Zahlenwerte wie bei Weltzell – seine Rechnung ist unverständlich – erscheinen in der folgenden Aufgabe zum Geflügelkauf.

#### **Geflügelkauf**

„Item. Einer will kaufen 20 Vogel pro 20 pf und will kaufen Krumetvogel [Krametvogel, Wacholderdrossel, Wiedehopf] und Schnepfen und Antvogel [Enten]. Und ein Antvogel pro 3 pf und 1 Schnepfen pro 2 pf und 2 Krumetvogel pro 1 pf. Wie viel soll er jedes haben? Facit 14 Krumetvogel, 5 Schnepfen, einen Antvogel.“

(Ars arithmetica ~ 1480; Vind. 3029, 73v)



Auch lösbar für 16 Krametsvögel und 4 Enten (ohne Schnepfen).

Es seien  $x$  Krametsvögel,  $y$  Schnepfen und  $20 - x - y$  Enten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x + 2y + 3(20 - x - y) &= 20 & \rightarrow & \frac{1}{2}x + 2y + 60 - 3x - 3y = 20 \\ -\frac{5}{2}x - y &= -40 \end{aligned}$$

$x = \frac{2}{5}(40 - y)$ , also muss  $y$  durch 5 teilbar sein, und damit ist  $y = 5$ .

Daraus folgt  $x = 14$ .

### 4.2.2.6 Problem der 100 Vögel und Zehenaufgaben: Regula virginum 3

#### Viehkauf



(Ries 1574, 71)

Anmerkung: 1 Ort =  $\frac{1}{4}$  fl

Mit  $o$  Anzahl der Ochsen (Preis 4 Gulden),  $s$  Anzahl der Schweine (Preis  $1\frac{1}{2}$  Gulden),  $k$  Anzahl der Kälber (Preis  $\frac{1}{2}$  Gulden) und  $g$  Anzahl der Geißen (Preis  $\frac{1}{4}$  Gulden) ergibt sich das folgende System von zwei diophantischen Gleichungen (natürlichzahlige Lösungen gesucht):

$$o + s + k + g = 100$$

$$4o + \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}k + \frac{1}{4}g = 100$$

Zusammengefasst:  $15o + 5s + k = 300$

Das Gleichungssystem ist offensichtlich unterbestimmt, also gibt es viele Lösungen, insgesamt über 200, die man alle als Quadrupel  $(o, s, k, g)$  schreiben kann:

Ries nennt nur  $(12, 20, 20, 48)$ . In numerischer Ordnung beginnen die Lösungen bei  $(1, 47, 50, 2)$  und enden mit  $(19, 2, 5, 74)$ .

Die Lösungen lassen sich computeralgebraisch oder mit einer Exceltabelle bestimmen.

#### 4.2.4 Aufgaben mit Folgen und Reihen

##### 4.2.4.2 Geometrische Reihen

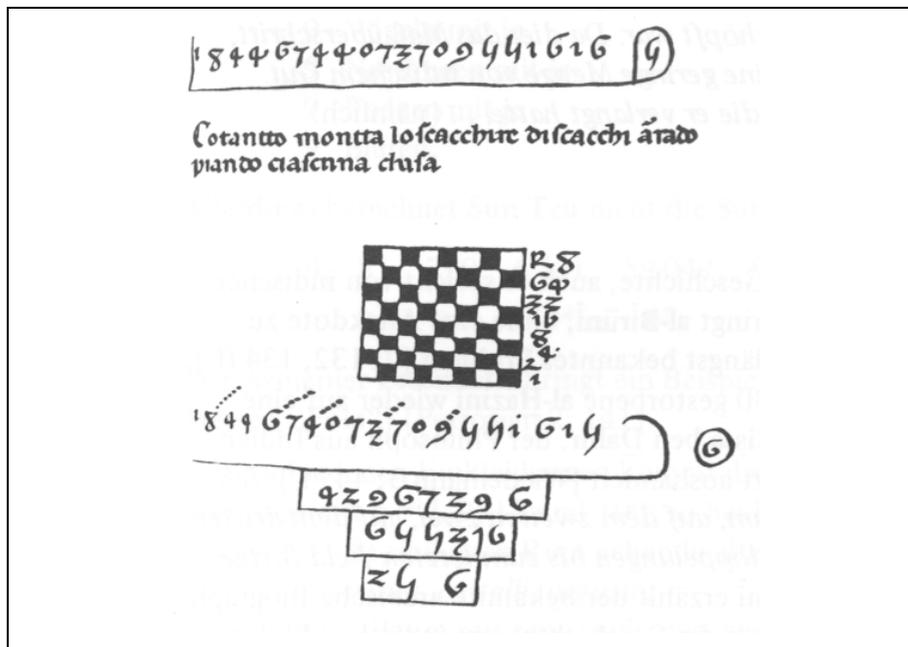
##### 4.2.4.2.2 Geometrische Reihen – Schachbrettaufgabe (Zweierprogression):

##### Verkauf über ein Schachbrett mit Reiskörnern

„Ein Künig hat versetzt das Peheimlandt und hat das versetzt nach dem Schachpret, das hält 64 Feld, und hat das geben nach dem ersten Feld um 1 Haller, und das ander um 2, das drit 4 etiam progressive et cetera ritscha(n)d(o). Quaeritur et cetera. Facit 1 844 674 407 370 955 1615, facit 1 537 228 672 809 1293 lb Regensburger und 15 gr. Das möchte kein Kaiser bezahlen.“

(AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 319; p. 141 = Curtze 1894, 398).

$$2^0 + \dots + 2^{64-1} = 2^{64} - 1 = (2^{10})^6 \cdot 2^4 - 1 = 1024^6 \cdot 16 - 1 > (10^3)^6 \cdot 16 > 1,6 \cdot 10^{19}.$$



(Tropfke 632 [Columbia-Algorithmus 88r nach D. E. Smith 1925, 2, 550])

#### **4.2.4.2.2 Geometrische Reihen – Schachbrettaufgabe (Zweierprogression): Pferdeverkauf über 4 Hufe mit je 8 Nägeln 1**

„Hat einer ein Pferd verkauft nach den Nägeln, der sein 32, und hat geben den ersten Nagel pro 1 Haller, den andern pro 2, den dritten pro 4 et cetera sic progressionem ritscha(n)d(o), facit 4 292 967 295 Haller, das macht 3 579 139 lb Regensburger und 33 gr.“

(AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 318; p. 140 = Curtze 1894, 398; ebenso AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 274, p. 125).

Ebenso:

„Ein Ross, das beschlagen ist, das hat  
4 Eisen, und ein jedes Eisen hat 8  
Nägel, also thundt die 4 Eisen 32  
Nägel, und wann einer das Ross verkauft ...“

(Linienrechenbuch, Tegernsee ~1480; Cgm 740, 33v; Kaunzner 1970, 15-16)

Lösung:

1. Nagel  $2^0$ ; 2. Nagel  $2^1$ ; 3. Nagel:  $2^2$ ; ... 32. Nagel:  $2^{32-1}$ .

Geometrische Reihe:  $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ .

Also  $2^0 + \dots + 2^{32-1} = 2^{32} - 1 = (2^{10})^3 \cdot 2^2 - 1 = 1024^3 \cdot 4 - 1 > (10^3)^3 \cdot 4 > 4 \cdot 10^9$ .

4.2.4.2 Geometrische Reihen – Schachbrettaufgabe (Zweierprogression):  
Pferdeverkauf über 4 Hufe mit je 8 Nägeln 2

1	1	<p><b>T</b>em ain hof das bestlagen ist, das hat  4 eysen, vnd ain yedes eysen hat. 8.  nagel, also hündt die 4. eysen. 32.  nagel, vnd wan ainer das hof verkauft,  in der mass, das er den ersten nagel ge-  winnen, sol mit. 1. d., vnd den anderen  mit. 2. d., vnd also das allmalen  die zal zwifach, das ist noch einmal  als vil als der nagel danor gemacht  werden sol. Will du dan wissen wie  des gelts an ain summa tref vnd  wade. So huc du also. Leg verliche  leg yedes nagel insunderhan  als du hic entgegen siehst, vnd  wan du dan die. 32 nagel also  gelegt hast, will du dan wissen  wie vil der summa sey mit  einander, so huc dan die  zwifachen progression pro-  portional als dan vorne  act, also, huc die leste  zal, das ist lege die all-  leste zal nider in die li-  nien, vnd leg dan dar  zu die zal noch amest,  doch. 1. d. minder,  so hast du wie vil  der gantzen summa  wird, das ist dan in ain summa wie nachfolgt.</p>
2	2	
3	4	
4	8	
5	16	
6	32	
7	64	
8	128	
9	256	
10	512	
11	1024	
12	2048	
13	4096	
14	8192	
15	16384	
16	32768	
17	65536	
18	131072	
19	262144	
20	524288	
21	1048576	
22	2097152	
23	4194304	
24	8388608	
25	16777216	
26	33554432	
27	67108864	
28	134217328	
29	268434656	
30	536869312	
31	1073738624	
32	2147477248	

(Linienrechenbuch, Tegernsee ~1480; Cgm 740, 33v)

4.2.4.2 Geometrische Reihen – Schachbrettaufgabe (Zweierprogression):  
 Pferdeverkauf über 4 Hufe mit je 8 Nägeln 3

4.2.9.4.9.6.7.2.9.5. Das ist viermalen  
 tausend malen tausent, zwient hundert  
 malen tausent malen tausent, heereij mal  
 tausentmal tausent, viij mal tausent, sieben  
 vnd sechzig tausent, ij. heerev. d. Das ist  
 alles in gold ye sieben poyristz stilling fur  
 i. gld. rechner ist also. 2025222.4.  
 Das ist. xx. tausentmal tausent, vierhun-  
 dert malen tausent, zwai vnd fuffzig tausent,  
 ij. vnd heereij gld. Weinst vnd. 45. d.  
 Wann aber yetlicher pfennig der. 32. Nagel am  
 weiste hufe ist, vnd man allweg. 30. nuss  
 vnd. i. d. gld. Will du dan wissen wievil. d.  
 die hufe reffen, vnd wievil darnach die pfennig  
 an gold ist, d. allweg. 210. d. fur. i. gld.  
 Das ist auch. 7. bayrist. p. fur. i. gld. re-  
 chner, So leg zim ersten die hufe ganz  
 Summa auf die Linien der. 32. Nagel, also,  
 4'2 9 4' 9 6 7' 2 9 5. vnd heb allweg mit  
 der Division auf. 30. nuss, vnd dorfur leg  
 i. d. als oft du magst, so ist das an am  
 Summa an pfennige. 143165576. vnd  
 am halbe, Das ist, hundertmalen tausent  
 malen tausent, drei vnd vierzig malen tau-  
 sent malen tausent, hundert tausent, heereij  
 v. vnd heereij. d. Das ist an gold. 681741.  
 Weinst gld. vnd heereij d. ist. sechshundert  
 malen tausent, heereij vij vnd lxi gld.  
 Weinst vnd heereij d.

(Linienrechenbuch, Tegernsee ~1480; Cgm 740, 34r)

#### **4.2.4.2.2 Geometrische Reihen – Schachbrettaufgabe (Zweierprogression): Pferdeverkauf über 4 Hufe mit je 8 Nägeln 4**

Ebenso: „Item. Einer will ein Ross verkaufen nach den Nägeln. Das Ross hat 4 Eisen, ein jeglich Eisen 8 Nägel, machen allenthalben 32 Nägel. So will er den ersten Nagel geben um einen Heller, den andern um 2 Heller, den dritten um 4 Heller, den vierten um 8 Heller, den fünften um 16 etc. Allemal nach so teuer. Ist die Frag, wie teuer das Ross verkauft wird.“ (Apian 1527, D 7)

**Exempel der vnderschnitten  
Progression.**

Item einer wil ein ross  
verkauffen nach den  
Nägeln. Das ross hat  
4 Eysen/ Ein itlich ey  
sen 8 negel/machent al  
lenthalden 32 Nægell/  
So wil er den erstenn  
nagel geben vmb eynē  
haller/den andern vmb 2 haller/ den drittē  
vmb 4 haller/den vierden vmb 8 hall:/den  
fünfften vmb 16 zc. allemal nach so teurer.  
Ist die frag wie teurr / das Ross verkaufft  
wirt.



#### **4.2.4.2.2 Geometrische Reihen – Schachbrettaufgabe (Zweierprogression): Kuhverkauf über 4 Beine mit je 4 Klauen**

Ähnlich: „Einer hat ein Kuh verkauft nach den Klauen, der sein 16 ...“ (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 317; p. 140 = Curtze 1894, 398).

### **4.2.5 Restprobleme**

#### **4.2.5.3 Die drei Schwestern: Mettenbesuch (kleinstes gemeinsames Vielfaches)**

„Sein 5 Chorschüler, derer 1 geht all Nacht gen Metten, die ander über die ander Nacht, die dritt über die dritten et cetera. Queritur, wann sie all zusammenkommen in einer Metten. Mach’s also: Multiplicir die Zahl miteinander, facit 120 Nacht.“

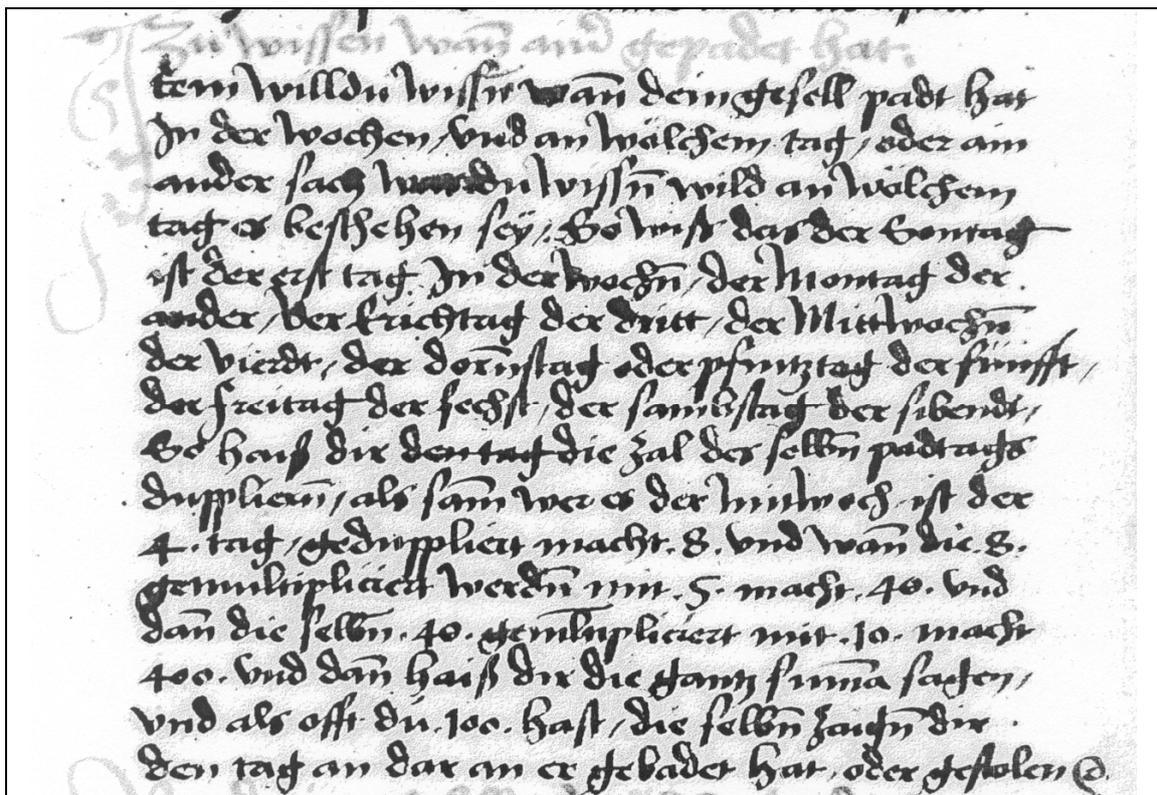
(AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 84, p. 54)

Die richtige Lösung ist 60 Nächte.

#### 4.2.6 Das Erraten von Zahlen: Zu wissen, wann einer gebadet hat

„Item. Willst du wissen, wann dein Gesell padt [gebadet] hat in der Wochen und an wölchem Tag, oder ein ander Sach, von dem du wissen willst, an wölchem Tag es geschehen sei, so wiß, dass der Sonntag ist der erst Tag in der Wochen, der Montag der ander, der Erichstag der dritt, der Mittwochen der viert, der Donnerstag oder Pfinztag der fünft, der Freitag der sechst, der Samstag der siebent. So heiß dir die Zahl des selbigen Badtags duplieren; als samm war es der Mittwoch, ist der 4. Tag, gedupliert macht 8. Und wann die 8 gemultipliziert werden mit 5, macht 40. Und dann die selben 40 gemultipliziert mit 10 macht 400. Und dann heiß dir die ganz Summa sagen, und als oft du 100 hast, die selben zeigen dir den Tag an, an dem er gebadet hat oder gestohlen etc.“

(Linienrechenbuch, Tegernsee ~1480; Cgm 740, 31v; Kaunzner 1970, 14)



Der befragte „Gesell“ musste mathematisch schon ziemlich unbedarft sein, wenn er diese Multiplikation der Tagzahl mit 100 nicht durchschaute, auch wenn sie mit  $\cdot 2 \cdot 5 \cdot 10$  etwas verschleiert gestaltet war.

#### 4.2.6.5 Das Erraten von Zahlen – Wo ist der Ring? (Fingerlein) 1

„Einer hat ein Fingerlein an dem Finger. Nun willst du wissen, welche Person das Fingerlein hat und an welchem Finger und an welchem Glied.

Mach's also: Sprich, dass einer unter ihnen zähle, und heiß ihn anheben an dem ersten, und heiß ihn zählen bis auf den, der das Fingerlein hat. Darnach heiß ihn dupliren die selbe Zahl, darnach heiß ihn addieren 5, darnach multipliciren mit 5. Darnach heiß ihn addiren den Finger und soll anheben zu zählen von dem kleinsten Finger der rechten Hand. Darnach heiß ihn 0 vor die Zahl setzen, das ist, heiß ihn die Zahl multiplicirn mit 10 und darnach heiß ihn addiren das Glied.

Und wenn das geschehen ist, so subtrahir von der gemachten Zahl 250, und was da bleibt, zeigt dir dein Meinung, wenn die erst Zahl gegen der linken Hand bedeut die Person, die ander Zahl den Finger, die dritt Zahl das Glied.

Doch je merk, wenn die ander Zahl wird 0, so nimm almol 1 von der dritten Figur und addir's zu 0, wird der 10 Finger. Und was dann bleibt darnach, bedeut die Person. Du fragst, warum soll man da subtrahirn 250 und hat vor[her] subtrahirt 350. Willdu das wissen, so nimm die kleinste Zahl, das ist 1 Mann, 1 Finger, 1 Glied. Nun mach's nach der Regel, kummt 361. Davon muss man subtrahiren 1 Zahl, dass 1.1.1 bleibt, und das ist keine denn 250.“

(AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 272, p. 123-124)

(Nr. 347 lat.; bloßes Zahlenraten ohne Geschichte: Nr. 270, 271, 310)

$((\text{Person} \cdot 2) + 5) \cdot 5 + \text{Finger} \cdot 10 + \text{Fingerglied}$

$\text{Person} \cdot 100 + 250 + \text{Finger} \cdot 10 + \text{Fingerglied}$

<p>¶ Volgen etliche schympfliche vñ Kurtzweylige Exenpl. ¶ Item es Sigen etlich personen an einer zedy/ vñnd einer vnder in hat einen Ring. Spricht einer vñnd in/ vnser ser einer hat eynen ring an eine finger kanstu derratir welcher den ring hat/ vñnd an welche finger vñ glid. Thu in also. Nym dir ey nen für am Tisch/ Sprich an dem wollen wir die re nung anheben/ vñnd wollen rechts vmbher zelen/das ist von dem ersten/zü der rechten handt. Nach der zellung sol der daum ann der rechten handt/der erst finger sein / vñnd der daum der lincken der 10 finger/ auch sol ein jechlich nagelglied das erst gelid sein . Dar auf stel die rechnung. Wan du den ring fin den wilt/ so heys die zal der psonē duplirn/ vñnd zü dem duplat 5 addirn/ die summa mit 5 multiplicirn/ vñnd die zall des fingers dar</p> 	<p>zü addirn/ das product heys mit 10 multi plicirn/ dar zü thun die zal des glids . Dar nach heiß dir anzeigen die ganze summa/ vñ der summa subtrahir 250. Auß dē rest soltu die person/den finger vñnd auch das glid al so fundē/die erste figur bey der rechtē handt zaigt an das glid/die ander den finger/ die vberige figurē wie viel jr sein zaigen die zal der person an. Nym ein gleichnus. Ich setz die Fünffzehen pson hab den ring am drit ten glid des mittel fingers der linckē hand. Machs also/die zall der person duplir st 30 Addir 5 facit 35 / multiplicir mit 5 st. 175 . Die zall des fingers addir facit 183/ das pro duct mit 10 multiplicir facit 1830. Die zall des glids addir facit 1833. Von der summa subtrahir 250 bleibe 1583 / bedeut das drit glid/ den achten finger vñnd die Fünffzē het personn.</p>
--	--

(Apian 1527, M 7-7v)

4.2.6.5 Das Erraten von Zahlen – Wo ist der Ring? (Fingerlein) 1

<p>Es sind gefallen an einer zech und          ist einer unter in der hat ein          fingerlein an einem finger. Nu          wil ich wissen an welcher hand          oder an welchen finger oder          gelied er hat und welcher man          er hat mache also Spruch wer          wilt rechnen und an demselben          hand in zeh als und spruch zeh          von dem vntz auf den der daz          fingerlein hat und die selber tzal          hat tzu machen und hat 5          dortzu tun und hat die selbe          tzal 5 mol alatz vil machen und          hat den finger dar tzu zeh          von dem kleinen der rechten hat          vntz auff d' do der ruck an ist          und hat die selbe tzal 10 mol</p>	<p>alz vil mache alz er mit ander          ist und hat die gelid dortzu zeh          und ist gemacht          Nu mach em daz du par der          nefft schatz wie vil vnder          vren 20 in daz fingerlein          hat der 4 in setz an die linke          hand an dem dalmen an dem          erste gelied daz wer 6 finger und          1 gelid nu mache al' ich ver hal          geschriben du spruchst er wer an          dem werden man mache tzu daz          wer 8 und du 5 dortzu wirt 13          und 5 mol 13 ist 65 und 6 fing          dortzu macht 71 und 10 mol 71          ist 710 und gelid dortzu ist 711          Nu merck du solt alle g</p>
--	---

Dorvon thum 250 daz ist sein regel  
 pleip 461 nu merck die ersten  
 4 bedeut der 4 ma die finger  
 darnach bedeut der 6 finger  
 die drut figur daz ist 1 bedeut  
 1 gelid und ist gemacht

4  
 man finger gelid

$$\begin{array}{r}
 4 \\
 5 \\
 13 \\
 65 \\
 71 \\
 710 \\
 711 \\
 \hline
 250 \text{ summa} \\
 461
 \end{array}$$

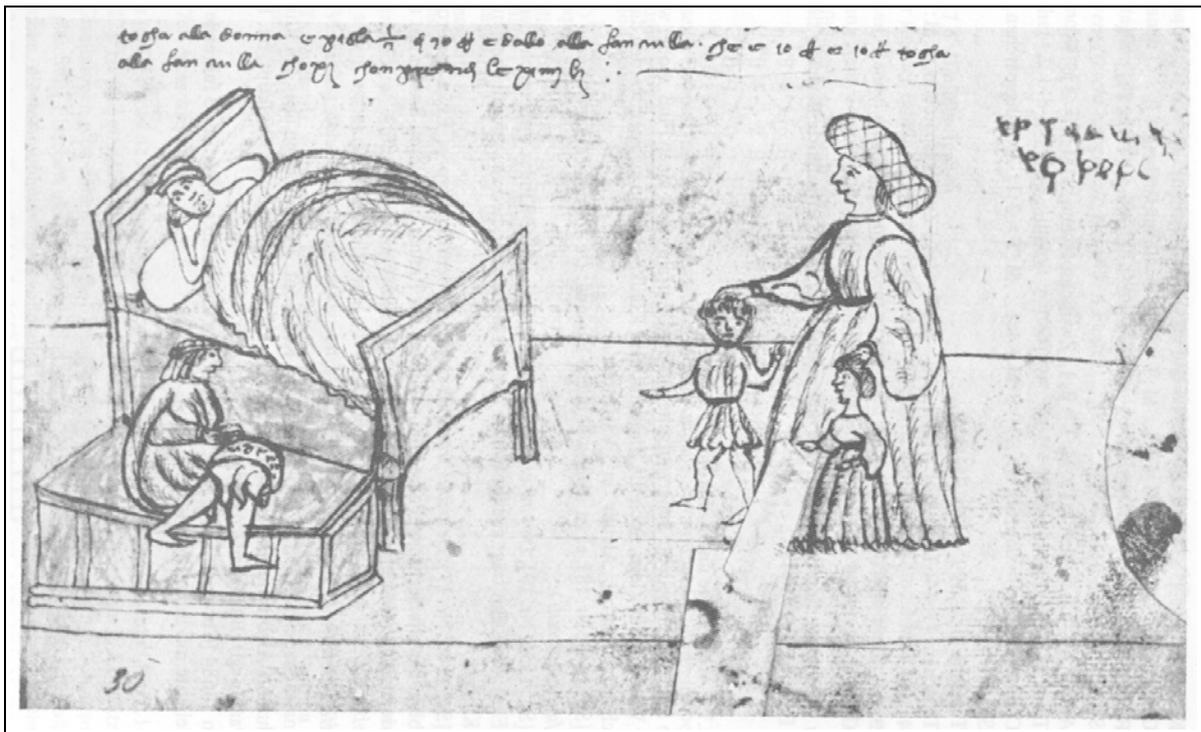
## 4.2.7 Anordnungsprobleme und andere Scherzaufgaben

### 4.2.7.4 Anordnungsprobleme, Scherzaufgaben – Zwillingerbschaft 1 (teilweise zu Gesellschaftsrechnung gestellt)

„Mach mir die Rechnung: Ein guter Mann will sterben und hinterlässt eine tragende Frau und spricht zu ihr: Dass du hast eine Tochter, ein weybes pildd (Weibsbild), so gebe ich ihr 2 Teile, und behalt dir 3 Teile für dich. Ist aber, dass du hast einen Sohn, einen Knaben, so gebe ich dem 3 Teile, und halt die 2 Teile für dich. Und er stirbt. Nun hatte die Frau einen Sohn und eine Tochter. Nun fraget ihr, in welcher Weise man soll die Ding teilen.“

(Erste deutsche Algebra, 1481; Dresden C 80, 378r; Vogel 1981, 41-42)

Die Lösung wird im Text detailliert und nachvollziehbar dargestellt, soll aber hier etwas moderner formuliert werden. Sei  $x$  der Anteil der Mutter, dann bekommt die Tochter  $\frac{2}{3}x$ , der Sohn  $\frac{3}{2}x$ . Das aufsummiert zu  $\frac{19}{6}x$  ist den 5 Teilen des Vermögens gleichzusetzen, so dass sich der Anteil der Mutter auf  $\frac{30}{19} = 1 \frac{11}{19}$  beläuft.



(Tropfke 657 [Paolo Dagomari (1281-1374), 86])

#### 4.2.7.4 Anordnungsprobleme, Scherzaufgaben – Zwillingserbschaft 2

<p>¶ Item ein bürger ligt am todbede / vnnnd hat ein schwangere frau . Er macht ein</p>
<p>estament also. Wan sein weib nach seinem absterben gebüre einen Sün/ so solt der selb sein Sün erben <math>\frac{2}{3}</math> seins gutzs/ vnd die mutter das überig behalten. Gebür sie aber eine tochter / so solt die tochter Erben den drittentail der verlassenen gütter / vnd die mutter <math>\frac{1}{3}</math> dritt. Der Erber man starb des legers vnd verließ nach in 2000 fl. Die Frau kam nyder vnd gebar zwyling/ einen Sün vnd eine tochter. Nu frag ich was de Sün/der Tochter vñ der frauen / jlichem in sündertail gebüre zu seinē tayl. Machs also. Die weil die Tochter das wenigst haben sol. Nym eine zal die dir gefelt / Als 2. Wan der tochter 2 gebüren/ so gebüren der mutter 6 vnd dem Sün 18. Sünir die zalln so wirt dar auß der tailer.</p> <p style="text-align: right;"> <math>\left. \begin{array}{l} \text{Mutter } 2 \text{ ft. fl. } 153 \frac{1}{3} \\ \text{Tochter } 6 \text{ ft. fl. } 461 \frac{1}{3} \\ \text{Sün } 18 \text{ ft. fl. } 1384 \frac{2}{3} \end{array} \right\} 26 \text{---} 2000 \text{---}</math> </p>

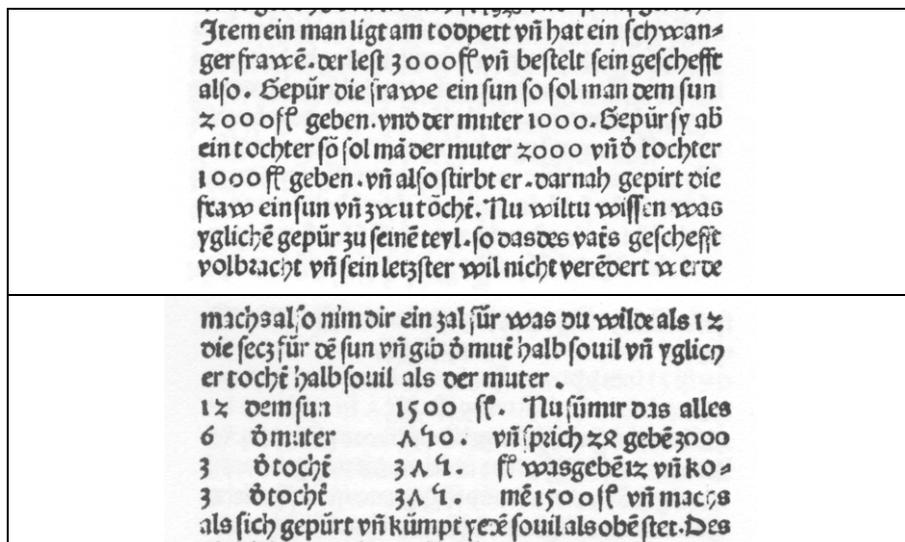
(Apian 1527, H 5-5v)

**4.2.7.4 Anordnungsprobleme, Scherzaufgaben – Zwillingerbschaft: Drillingerbschaft 1**

Die Aufgabe der Zwillingerbschaft gibt es ähnlich mit drei Kindern:

„Item. Ein Mann liegt am Tot[en]bett und hat ein schwanger Frau. Der [hinter]lässt 3000 fl und bestellt sein Geschäft also: Gebär die Frau ein Sohn, so soll man dem Sohn 2000 fl geben und der Mutter 1000. Gebär sie aber ein Tochter, so soll man der Mutter 2000 und der Tochter 1000 fl geben. Und also stirbt er. Darnach gebiert die Frau ein[en] Sohn und zwu [zwei] Töchter. Nun willst du wissen, was jeglichem gebühr zu seinem Teil, so dass des Vaters Geschäft vollbracht und sein letzter Will nicht verändert werde ...“

(Wagner 1483, 34; Schröder 1988, 73-74, 202-203)

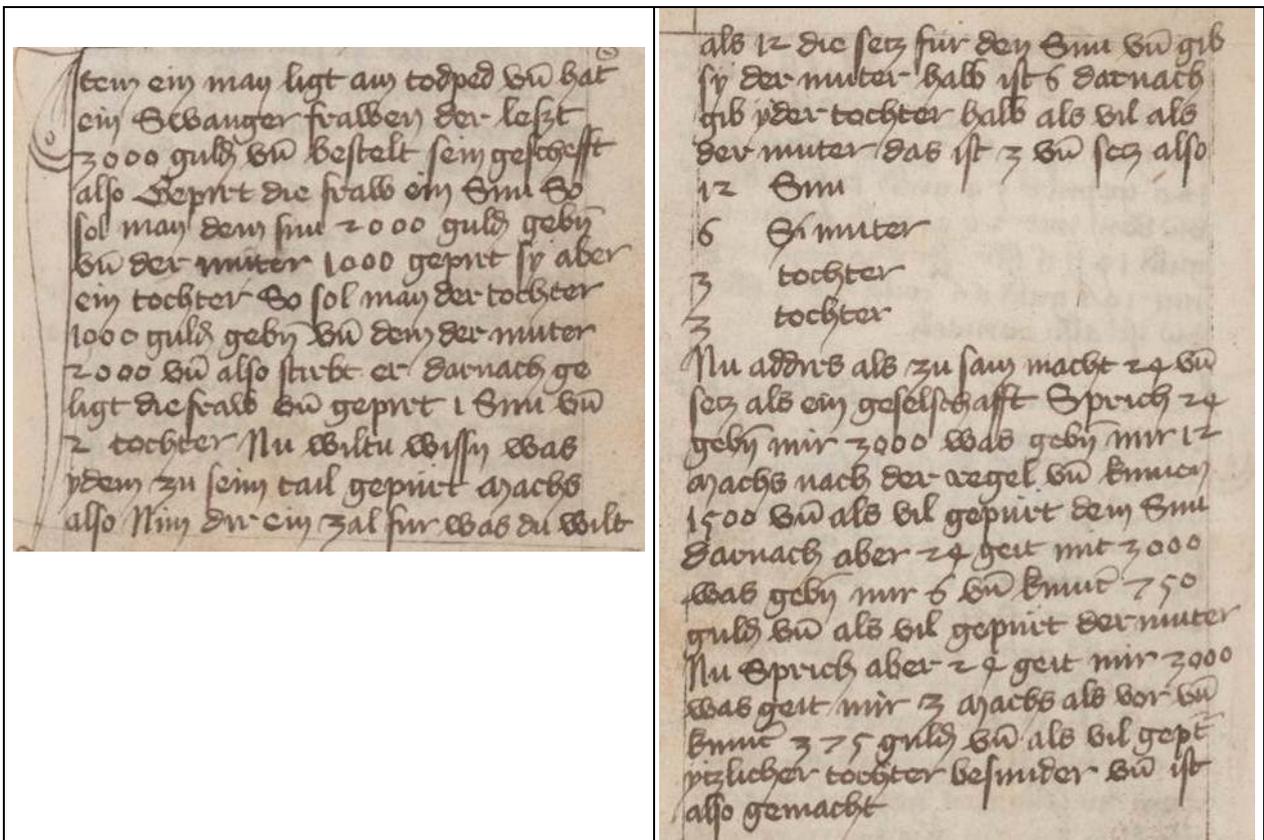


Ebenso: „Item. Ein Mann liegt an dem Tot[en]bett. Und hat ein schwangere Frau, der lässt er 3000 fl und bestellt seinen letzten Willen also: Gebiert die Frau ein Sohn, so soll man dem Sohn 2000 fl geben und der Mutter 1000. Gebiert sie aber ein Tochter, so soll man der Mutter 2000 fl geben und der Tochter 1000 Und also stirbt er. Danach gebiert die Frau 1 Sohn und 2 Töchter ...“

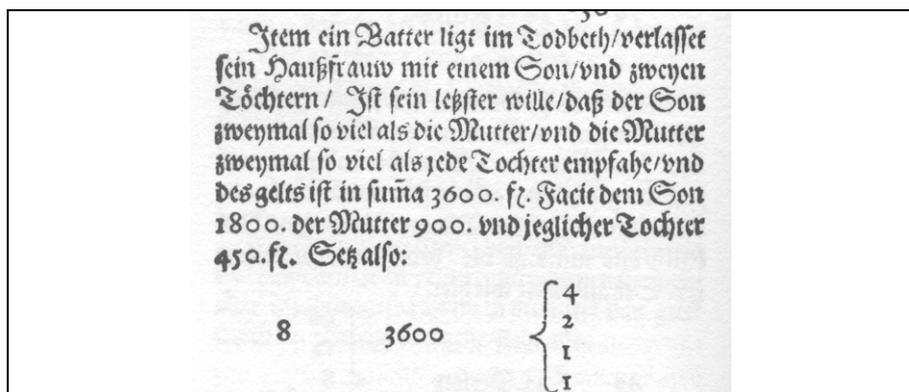
(Widmann 1489, 145v-146; Gärtner 2000, Nr. 238, p. 453)

Ebenso: „Esto quidam in agone uxorem habens ...“ (AR, 1460; Vogel 1954, Nr. 209; p. 97)

**4.2.7.4 Anordnungsprobleme, Scherzaufgaben – Zwillingerbschaft: Drillingerbschaft 2**



(Ars arithmetica ~ 1480; Vind. 3029, 55-55v (= AR Nr. 209))



(Ries 1574, 54v)

# Münz-, Maß- und Gewichts-Einheiten

## Münzen

Bei Münzeinheiten ist zu unterscheiden zwischen der Währung im Großhandel mit Gewürzen, Stoffen oder Metallen auf internationaler Ebene und der Währung im Kleinhandel mit lokalem Charakter. Als größere Zahlungseinheit im Geldverkehr bildete sich der Gulden im ausgehenden Mittelalter mit den wachsenden weitreichenden Handelsverbindungen heraus. Er wurde zuerst 1252 in Florenz (Florentiner), dann auch in Genua geprägt. Der Gulden entsprach etwa dem römischen Goldsolidus des 6. Jahrhunderts zu 3,78 g Feingold.

In Deutschland wurde der Gulden 1356 durch Karl IV. als Zahlungsmittel eingeführt. Eine Ausprägung von größerem Umfang erfolgte im Jahre 1386, wobei 66 Rheinische Goldgulden auf eine Kölner Mark gingen. Dieser Rheinische Gulden (Florentiner, Florin, Floren) setzte sich in der Folgezeit in Deutschland als stabile Währungseinheit durch. Als kleinere Rechnungseinheiten dienten der Schilling und der Heller mit den Relationen 1 Rheinischer Gulden = 20 Schilling in Gold und 1 Rheinischer Gulden = 240 Heller in Gold. Schilling und Heller dienten lediglich für die Buchführung als Rechnungseinheiten und wurden nicht als Münzen ausgeprägt. Für 5 Schilling existiert noch die Münzeinheit Ort, also 1 Rheinischer Gulden = 4 Ort in Gold. Neben Gulden gab es noch Dukaten mit einer höheren Feinheit als der Gulden. Für 100 Dukaten war ein Aufgeld von  $25\frac{3}{4}$  bis 32 Gulden zu zahlen, so daß sich folgende Gleichsetzung ergibt: 100 Dukaten äquivalent mit  $125\frac{3}{4}$  bis 132 Rheinische Gulden. Außerdem findet sich noch die Relation 100 Rheinische Gulden = 76 Ungarische Gulden.

Der Kleinhandel mit vorwiegend lokalem Charakter (bezogen auf Nürnberg) wurde meistens mit Pfennigen (Abkürzung:

dn. = denarius) und Heller (1 Heller = 2 Pfennige) abgewickelt. Größere Zahlungseinheiten waren das Pfund (Abkürzung: lb. = libra) und der aus Böhmen stammende Groschen. Es galten die Relationen 1 Pfund (lb) = 30 Pfennig (dn), 1 Groschen = 7 Pfennig (dn), 1 Rheinischer Gulden = 19 Groschen, 1 Ungarischer Gulden = 24 Groschen, 1 Dukaten = 25 Groschen, 60 Groschen = 1 Schock.

## Gewichte

1 Zentner (c) = 100 Pfund (Abkürzung: oder lb. = libra). Die Abkürzungen für Pfund als Gewichtseinheit (℔) und Währungseinheit (lb) werden nicht konsequent auseinandergelassen. Man muß aus dem Zusammenhang herauslesen, was gemeint ist.

1 Pfund = 32 Lot, 1 Lot = 4 Quent, 1 Quent = 4 dn-Gewicht (Pfennig-Gewicht), 1 dn-Gewicht = 2 Heller-Gewicht. Außerdem gilt: 1 Unze = 2 Lot, 1 Mark = 16 Lot.

Das Pfund als Gewichtseinheit erfuhr eine unterschiedliche Interpretation: 100 Pfund in Nürnberg = 116 Pfund in „pruck“ (Innsbruck), 100 Pfund in Venedig = 60 Pfund in Nürnberg,

100 Pfund in Eger =  $133\frac{1}{3}$  in Nürnberg, 1 Kargo (Pfeffer) = 400 Pfund in Venedig.

Zur Bestimmung des Feingehaltes von Gold wird die Mark zugrunde gelegt. 1 Mark hält am Strich 24 Karat (auch Gran) 1 Karat = 4 Gran. Die Feinheit des Edelmetalls wurde durch „Streichen“ am Probestein ermittelt.

1 Mark = 8 Unzen, 1 Unze = 2 Lot, 1 Lot = 2 Quart, 1 Quart =  $\frac{3}{2}$  Say, 1 Say =  $\frac{4}{3}$  Quent, 1 Quent = 4 dn-Gewicht.

1 dn-Gewicht = 2 Heller -Gewicht, 1 Heller-Gewicht =  $\frac{9}{4}$  Karat, 1 Karat = 4 Gran.

In Venedig galt Karat als Gewichtseinheit.

## Maßeinheiten für Wein, Getreide, Fisch, Eisen

1 Fuder = 12 Eimer = 816 Maß, 1 Eimer = 68 Maß.

1 Sumer Korn = 16 Metzen, 1 Sumer Hafer = 32 Metzen (Diese Nürnberger Maße waren in dieser Stadt noch 1848 in Gebrauch.) 12 Tonnen Heringe = 1 Last, 1 Pfund Eisen = 240 Schienen (wohl Eisenstäbe).

## Längeneinheiten für Stoffe

Fardel	Saum	Tuch	Parchent	Ellen
1		22	45	.
	1	1		32
			1	22

Diese Tabelle ließe sich vervollständigen. Man käme dann auf gebrochene Zahlen. Darauf wird hier verzichtet.

## Zeiteinheiten

1 Arbeitstag = 11 Or (Stunden)

(Wagner 1483; Schröder 1988, 287-289)